

1 Ouverts et fermés

Exercice 1 ★ Exemples –

Déterminer si les ensembles suivants sont ouverts ou fermés :

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x - 1| < 1\} & B &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y\} \\ C &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| \leq 1\} & D &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q} \text{ et } y \in \mathbb{Q}\} \\ E &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \notin \mathbb{Q} \text{ ou } y \notin \mathbb{Q}\} & F &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}. \end{aligned}$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1495]

Exercice 2 ★★ Exemples d'ouverts et de fermés de \mathbb{R} –

Dans l'espace vectoriel normé \mathbb{R} , déterminer si les parties suivantes sont ouvertes ou fermées : \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , $[0, 1[$, $[0, +[$, $]0, 1[\cup \{2\}$, $\{1/n, n \in \mathbb{N}^*\}$, $\bigcap_{n \geq 1}] - 1/n, 1/n[$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1502]

Exercice 3 ★★ Ouverts ou fermés dans l'espace des fonctions continues –

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. On pose

$$O = \{f \in E : f(1) > 0\} \text{ et } F = \left\{f \in E : \int_0^{1/2} f(t) dt \leq 0\right\}.$$

1. Est-ce que O est un ouvert de $(E, \|\cdot\|_\infty)$? de $(E, \|\cdot\|_1)$?
2. Est-ce que F est un fermé de $(E, \|\cdot\|_\infty)$? de $(E, \|\cdot\|_1)$?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3287]

Exercice 4 ★★★ Parties ouvertes et fermées dans des ensembles de fonctions –

Soit E l'espace vectoriel des fonctions bornées de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et $F = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$.

1. On pose $A_1 = \{f \in E : \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0\}$. Est-ce que A_1 est une partie fermée de $(E, \|\cdot\|_\infty)$?
2. On pose $A_2 = \{f \in E : \forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0\}$. Est-ce que A_2 est une partie ouverte de $(E, \|\cdot\|_\infty)$?
3. On pose $A_3 = \{f \in F : \forall x \in [0, 1], f(x) > 0\}$. Est-ce que A_3 est une partie ouverte de $(F, \|\cdot\|_\infty)$?
4. Est-ce que A_3 est une partie ouverte de $(F, \|\cdot\|_1)$?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3286]

Exercice 5 ★★ Réunion de boules –

Soit $\lambda > 0$. Pour tout entier $n \geq 1$, on note B_n le disque

$$B_n = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{\lambda^2}{n^2} \right\}.$$

1. A quelle condition sur λ a-t-on $B_{n+1} \subset B_n$.
2. Soit $B = \bigcup_{n \geq 1} B_n$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que B soit fermé.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1496]

Exercice 6 ★★★ Somme d'un ensemble et d'un ouvert ou d'un fermé –

Soit (E, N) un espace vectoriel normé, et A et B deux parties de E . On définit :

$$A + B = \{z \in E ; \exists x \in A, \exists y \in B, z = x + y\}.$$

1. Démontrer que si A est ouvert, alors pour tout $b \in E$, $A + \{b\}$ est ouvert.

- Démontrer que si A est ouvert, alors $A + B$ est ouvert.
- Démontrer que les parties $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy = 1\}$ et $B = \{0\} \times \mathbb{R}$ sont fermées.
- Démontrer que $A + B$ n'est pas fermée, pour A et B les parties de \mathbb{R}^2 introduites à la question précédente.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1498]

Exercice 7 ★ Sous-espace vectoriel ouvert –

Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E . On suppose que F est ouvert. Démontrer que $F = E$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1499]

Exercice 8 ★★ Séparation par des ouverts de deux parties à distance positive –

Soit E un espace vectoriel normé et A, B deux parties de E . On suppose que $\inf_{x \in A, y \in B} \|x - y\| > 0$. Démontrer qu'il existe deux ouverts U et V de E tels que $A \subset U$, $B \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1500]

Exercice 9 ★★★★★ Tout ouvert de \mathbb{R} est réunion d'intervalles ouverts –

Dans cet exercice, la notation (x, y) désigne le segment $[x, y]$ ou le segment $[y, x]$ suivant l'ordre de x et de y . On considère U un ouvert de \mathbb{R} . On définit une relation sur les éléments de U par

$$x \mathcal{R} y \iff (x, y) \subset U.$$

- Démontrer que \mathcal{R} est une relation d'équivalence. Pour $x \in U$, on note $C(x)$ la classe d'équivalence de x .
- Démontrer que $C(x)$ est un intervalle.
- Démontrer que $C(x)$ est un intervalle ouvert.
- En déduire que U est réunion d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1503]

Exercice 10 ★★★★★ Quelques parties de l'ensemble des suites bornées –

Soit E l'espace vectoriel des suites réelles bornées, muni de la norme $\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$. Déterminer si les ensembles suivants sont fermés ou non :

$$\begin{aligned} A &= \{\text{suites croissantes}\}, & B &= \{\text{suites convergeant vers } 0\} \\ C &= \{\text{suites périodiques}\} \end{aligned}$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1504]

Exercice 11 ★★ Ouverts fermés d'un espace vectoriel normé –

Soit E un espace vectoriel normé. Démontrer que les seules parties à la fois ouvertes et fermées de E sont \emptyset et E .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3278]

2 Intérieur et adhérence

Exercice 12 ★ Exemples –

Dessiner, puis déterminer l'intérieur et l'adhérence des parties de \mathbb{R}^2 suivantes :

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1505]

$$\begin{aligned} B &= \{ \\ D &= \{ \end{aligned}$$

Exercice 13 ★ Adhérence de boules –

Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que l'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée de même centre et même rayon.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1506]

Exercice 14 ★★ Adhérence et intérieur d'un sous-espace vectoriel –

Soit E un espace vectoriel normé, et V un sous-espace vectoriel de E .

1. Montrer que \bar{V} est un sous-espace vectoriel de E .
2. Montrer que si $\overset{\circ}{V} \neq \emptyset$, alors $V = E$.
3. Application 1 : soit H un hyperplan de E . Démontrer que H est ou bien fermé ou bien dense dans E .
4. Application 2 : soit A une partie de E . Démontrer que $\text{vect}(\bar{A}) \subset \text{vect}(A)$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1507]

Exercice 15 ★★ Adhérence dans l'espace des fonctions continues –

On considère sur E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} les deux normes suivantes :

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| \text{ et } \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt.$$

On note $F = \{f \in E; f(0) = 0\}$. Déterminer l'adhérence de F dans E pour chacune des deux normes précédentes.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2490]

Exercice 16 ★★★ Exemple dans les fonctions continues –

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} , muni de $\|\cdot\|_{\infty}$. On note D l'ensemble des fonctions de E qui sont dérivables et P l'ensemble des fonctions de E qui sont polynomiales. Déterminer l'intérieur de D et de P .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1508]

Exercice 17 ★★★ Opérations ensemblistes –

Soient A, B deux parties d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$.

1. On suppose $A \subset B$. Démontrer que $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$ et que $\bar{A} \subset \bar{B}$.
2. Démontrer que $(A \cap B)^{\circ} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ et que $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset (A \cup B)^{\circ}$, mais que l'inclusion peut être stricte.
3. Comparer $\overline{A \cap B}$ et $\bar{A} \cap \bar{B}$, puis $\overline{A \cup B}$ et $\bar{A} \cup \bar{B}$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1509]

Exercice 18 ★★★ Intérieur et adhérence d'un convexe –

Soit C une partie convexe d'un espace vectoriel normé. Démontrer que l'adhérence de C est convexe, puis que l'intérieur de C est convexe.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1510]

Exercice 19 ★★★ Adhérence de la somme –

Soit E un espace vectoriel normé et A, B deux parties de E .

1. Démontrer que $\overline{A+B} \subset \bar{A} + \bar{B}$.
2. On suppose que $E = \mathbb{R}^2$ et on pose $A = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 : xy = 1\}$, $B = \mathbb{R} \times \{0\}$. Calculer $A+B$, \bar{A} , \bar{B} et $\bar{A+B}$. Que peut-on en déduire ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3290]

Exercice 20 ★★★ Un exemple un peu compliqué –

Donner un exemple d'ensemble A tel que A , l'adhérence de A , l'intérieur de A , l'adhérence de l'intérieur de A et l'intérieur de l'adhérence de A sont des ensembles distincts deux à deux.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1511]

Exercice 21 ★★★★★ La frontière ! –

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E . On rappelle que la frontière de A est l'ensemble $\text{Fr}(A) = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \bar{A} \cap \overline{C_E A}$. Montrer que :

1. $\text{Fr}(A) = \{x \in E \mid \forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset \text{ et } B(x, \varepsilon) \cap C_E A \neq \emptyset\}$.
2. $\text{Fr}(A) = \text{Fr}(C_E A)$.
3. A est fermé si et seulement si $\text{Fr}(A)$ est inclus dans A .
4. A est ouvert si et seulement si $\text{Fr}(A) \cap A = \emptyset$.
5. Montrer que si A est fermé, alors $\text{Fr}(\text{Fr}(A)) = \text{Fr}(A)$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1512]

Exercice 22 ★★★★★ Valeur d'adhérence et adhérence de l'ensemble des valeurs ! –

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et (u_n) une suite de E . On note V l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) .

1. Démontrer que $V = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{u_p : p \geq n\}}$.
2. En déduire que V est fermé.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3289]

Exercice 23 ★★★★★ Diamètre d'une partie bornée –

Soit E un espace vectoriel normé Soit A une partie non vide et bornée de E . On définit $\text{diam}(A) = \sup\{\|y - x\|, x, y \in A\}$.

1. Démontrer que \bar{A} et $\text{Fr}(A)$ sont également bornés.
2. Comparer $\text{diam}(A)$, $\text{diam}(\bar{A})$ et $\text{diam}(\overset{\circ}{A})$ lorsque $\overset{\circ}{A}$ est non vide.
3. Montrer que $\text{diam}(\text{Fr}(A)) \leq \text{diam}(A)$. Soit x un élément de A , et u un élément de E avec $u \neq 0$. On considère l'ensemble $X = \{t \geq 0 \mid x + tu \in A\}$. Montrer que $\sup X$ existe. En déduire que toute demi-droite issue d'un point x de A coupe $\text{Fr}(A)$. En déduire que $\text{diam}(\text{Fr}(A)) = \text{diam}(A)$.
4. Montrer que $\text{diam}(\text{Fr}(A)) \leq \text{diam}(A)$.
5. Soit x un élément de A , et u un élément de E avec $u \neq 0$. On considère l'ensemble $X = \{t \geq 0 \mid x + tu \in A\}$. Montrer que $\sup X$ existe.
6. En déduire que toute demi-droite issue d'un point x de A coupe $\text{Fr}(A)$.
7. En déduire que $\text{diam}(\text{Fr}(A)) = \text{diam}(A)$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1513]

3 Partie dense

Exercice 24 ★★ Intersection d'ouverts denses –

Soient U et V deux ouverts denses d'un espace vectoriel normé E . Démontrer que $U \cap V$ reste dense.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1514]

Exercice 25 ★★★★★ Tantôt fermé –

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E; f(0) = 0\}$.

1. On munit E de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|$. Démontrer que F est fermé dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
2. On munit E de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx$. Démontrer que F est dense dans $(E, \|\cdot\|_1)$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1517]

Exercice 26 ★★★★★ **Différence de deux suites –**

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels telles que

$$u_n \rightarrow +\infty, v_n \rightarrow +\infty, u_{n+1} - u_n \rightarrow 0.$$

1. Soit $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $n \geq n_0$, $|u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon$. Démontrer que, pour tout $a \geq u_{n_0}$, il existe $n \geq n_0$ tel que $|u_n - a| \leq \varepsilon$.
2. En déduire que $\{u_n - v_p; n, p \in \mathbb{N}\}$ est dense dans \mathbb{R} .
3. Montrer que l'ensemble $\{\cos(\ln n); n \geq 1\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1516]

Exercice 27 ★★★★★ **Sous-groupes de \mathbb{R} –**

Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$.

1. Justifier l'existence de $m = \inf\{x \in H; x > 0\}$.
2. On suppose que $m > 0$. Démontrer que $m \in H$ puis que $H = m\mathbb{Z}$.
3. On suppose que $m = 0$. Démontrer que H est dense dans \mathbb{R} .
4. En déduire que, si a et b sont deux réels non nuls, $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans \mathbb{R} si et seulement si $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1515]

4 Applications continues

Exercice 28 ★ **Ouverts ou fermés –**

Démontrer que les deux ensembles suivants sont ouverts :

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 < \exp(\sin y) + 12\}, \quad G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 < \ln(x^2 + 1) < 1\}.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1518]

Exercice 29 ★ **Continuité et équation fonctionnelle –**

Soit E un espace vectoriel normé, et $h : E \rightarrow E$ une application continue admettant une limite ℓ en 0 et vérifiant $h(x) = h(x/2)$ pour tout $x \in E$. Démontrer que h est constante.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1519]

Exercice 30 ★ **Exemple de fonction lipschitzienne –**

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Démontrer que $f : E \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1 + \|x\|}$ est 1-lipschitzienne.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3292]

Exercice 31 ★★ **Fonction continue et bijection réciproque continue –**

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $g : E \rightarrow E, x \mapsto \frac{x}{1 + \|x\|}$. Démontrer que g est une bijection de E dans $B(0, 1)$ puis que g et g^{-1} sont continues.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3293]

Exercice 32 ★★ **Fonctions continues sur l'espace des fonctions continues! –**

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. Démontrer que $\varphi : E \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \inf_{[0, 1]} f$ est continue.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3294]

Exercice 33 ★★★★★ **Séparation de deux fermés –**

Soient A et B deux fermés d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$.

1. Démontrer que $A \cap B = \emptyset \iff \forall x \in E, d(x, A) + d(x, B) > 0$.

2. On suppose que A et B sont disjoints. Démontrer qu'il existe $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f|_A = 0$ et $f|_B = 1$.

3. En déduire qu'il existe deux ouverts U et V de E tels que $A \subset U, B \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1521]

Exercice 34 ★★★★★ Une équation fonctionnelle –

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}(f(x) + f(y)).$$

1. Démontrer que $\mathcal{D} = \{p/2^n; p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans \mathbb{R} .

2. Démontrer que si f s'annule en 0 et en 1, alors $f = 0$.

3. Conclure que dans le cas général, f est affine.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1523]

Exercice 35 ★★★★★ Espace vectoriel des fonctions lipschitziennes –

Soit A une partie bornée d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$. On note \mathcal{L} l'espace vectoriel des applications lipschitziennes de A dans E .

1. Démontrer que les éléments de \mathcal{L} sont des fonctions bornées.

2. Pour $f \in \mathcal{L}$, on pose

$$K_f = \{k \in \mathbb{R}_+; \forall (x, y) \in A^2, \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|\}.$$

Démontrer que K_f admet une borne inférieure. Dans la suite, on notera C_f cette borne inférieure.

3. Justifier que $C_f \in K_f$.

4. Démontrer que si $f, g \in \mathcal{L}$ et si $\lambda \in \mathbb{C}^*$, alors $C_{f+g} \leq C_f + C_g$ et $C_{\lambda f} = |\lambda|C_f$.

5. Pour $a \in A$, on note $N_a(f) = \|f(a)\| + C_f$. Démontrer que N_a est une norme sur \mathcal{L} .

6. Soient $a \neq b \in A$. Les normes N_a et N_b sont-elles équivalentes ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1524]

Exercice 36 ★★★★★ Continuité uniforme en deux variables –

La fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy$ est-elle uniformément continue ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1525]

5 Limites et continuité en pratique

Exercice 37 ★ Calcul de limites détaillé –

1. Montrer que si x et y sont des réels, on a :

$$2|xy| \leq x^2 + y^2$$

2. Soit f l'application de $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ dans \mathbb{R} définie par

$$f(x, y) = \frac{3x^2 + xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Montrer que, pour tout (x, y) de A , on a :

$$|f(x, y)| \leq 4\|(x, y)\|_2,$$

où $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2}$. En déduire que f admet une limite en $(0,0)$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[37]

Exercice 38 Diverses limites –

Les fonctions suivantes ont-elles une limite en l'origine ?

1. $f(x,y) = \left(\frac{x^2 + y^2 - 1}{x} \sin x, \frac{\sin(x^2) + \sin(y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$

2. $f(x,y) = \frac{1 - \cos(xy)}{xy^2}$

3. $f(x,y) = \frac{xy^4}{x^4 + y^6}$

4. $f(x,y) = \frac{x^3 y^4}{x^8 + y^6}$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[40]

Exercice 39 Limites à paramètres –

Soient $\alpha, \beta > 0$. Déterminer, suivant les valeurs de α et β , si la fonction

$$f(x,y) = \frac{x^\alpha y^\beta}{x^2 + y^2}$$

admet une limite en $(0,0)$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[39]

Exercice 40 Comme une limite –

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \text{ et } f(0,0) = 0.$$

La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[41]

Exercice 41 En deux parties –

Démontrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} 2x^2 + y^2 - 1 & \text{si } x^2 + y^2 > 1 \\ x^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

est continue sur \mathbb{R}^2 .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[42]

Exercice 42 Prolongement par continuité –

Démontrer que la fonction définie par $f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{xy}$ se prolonge en une fonction continue sur \mathbb{R}^2 .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[43]

Exercice 43 Avec la dérivée –

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 . On définit $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$F(x,y) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démontrer que F est continue sur \mathbb{R}^2 .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[44]

Exercice 44 ★★★★★ **Application aux fonctions d'une variable –**

Soit $C \subset \mathbb{R}^2$ une partie convexe et $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Démontrer que $f(C)$ est un intervalle.

2. Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et injective. Démontrer que h est strictement monotone. On pourra utiliser la fonction $f(x, y) = h(x) - h(y)$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[45]

6 Applications linéaires continues

Exercice 45 ★★ **Sont-elles continues ? –**

Déterminer si l'application linéaire $T : (E, N_1) \rightarrow (F, N_2)$ est continue dans les cas suivants :

1. $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$ et $T : (E, \|\cdot\|_1) \rightarrow (E, \|\cdot\|_1)$, $f \mapsto fg$ où $g \in E$ est fixé.

2. $E = \mathbb{R}[X]$ muni de $\|\sum_{k \geq 0} a_k X^k\| = \sum_{k \geq 0} |a_k|$ et $T : (E, \|\cdot\|) \rightarrow (E, \|\cdot\|)$, $P \mapsto P'$.

3. $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni de $\|\sum_{k=0}^n a_k X^k\| = \sum_{k=0}^n |a_k|$ et $T : (E, \|\cdot\|) \rightarrow (E, \|\cdot\|)$, $P \mapsto P'$.

4. $E = \mathbb{R}[X]$ muni de $\|\sum_{k \geq 0} a_k X^k\| = \sum_{k \geq 0} k! |a_k|$ et $T : (E, \|\cdot\|) \rightarrow (E, \|\cdot\|)$, $P \mapsto P'$.

5. $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$, $F = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$ et $T : (E, \|\cdot\|_2) \rightarrow (F, \|\cdot\|_1)$, $f \mapsto fg$ où $g \in E$ est fixé.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1528]

Exercice 46 ★ **Continue pour une norme –**

Soit $T : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ défini par $T(P) = P'$. Étudier la continuité de T lorsque $\mathbb{R}[X]$ est muni de la norme

1. $N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)|$;

2. $N_2(P) = \sup_{x \in [0, 1]} |P(x)|$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3280]

Exercice 47 ★★★★★ **Applications linéaires sur les polynômes –**

Soit $E = \mathbb{R}[X]$, muni de la norme $\|\sum_i a_i X^i\| = \sum_i |a_i|$.

1. Est-ce que l'application linéaire $\phi : (E, \|\cdot\|) \rightarrow (E, \|\cdot\|)$, $P(X) \mapsto P(X+1)$ est continue sur E ?

2. Est-ce que l'application linéaire $\psi : (E, \|\cdot\|) \rightarrow (E, \|\cdot\|)$, $P \mapsto AP$, où A est un élément fixé de E , est continue sur E ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1529]

Exercice 48 ★★★★★ **Jamais continue ! –**

Soit $E = \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R})$. On considère l'opérateur de dérivation $D : E \rightarrow E$, $f \mapsto f'$. Montrer que, quelle que soit la norme N dont on munit E , D n'est jamais une application linéaire continue de (E, N) dans (E, N) .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1532]

Exercice 49 ★★ **Norme d'une application linéaire continue –**

Soit E un espace vectoriel normé et $\mathcal{L}_c(E)$ l'ensemble des applications linéaires continues sur E . Pour $u \in \mathcal{L}_c(E)$, on pose

$$\|u\| = \sup\{\|u(x)\|; \|x\| \leq 1\}.$$

1. Démontrer que ceci définit une norme sur $\mathcal{L}_c(E)$.

2. Démontrer que, pour tout $x \in E$ et tout $u \in \mathcal{L}_c(E)$, on a

$$\|u(x)\| \leq \|u\| \times \|x\|.$$

En déduire que, pour tous $u, v \in \mathcal{L}_c(E)$, alors $\|u \circ v\| \leq \|u\| \times \|v\|$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1536]

Exercice 50 Projection –

Soit E un espace vectoriel normé et u un endomorphisme de E vérifiant, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leq \|x\|$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u^k.$$

1. Simplifier $v_n \circ (u - Id)$.
2. Montrer que $\ker(u - Id) \cap \text{Im}(u - Id) = \{0\}$.
3. On suppose désormais que E est de dimension finie. Démontrer que

$$\ker(u - Id) \oplus \text{Im}(u - Id) = E.$$

4. Soit p la projection sur $\ker(u - Id)$ parallèlement à $\text{Im}(u - Id)$. Démontrer que, pour tout $x \in E$, $v_n(x) \rightarrow p(x)$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1535]

7 Norme des applications linéaires continues

Exercice 51 Multiplication sur un espace de polynômes –

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni de la norme

$$\left\| \sum_{k \geq 0} a_k X^k \right\|_{\infty} = \sup_{k \geq 0} |a_k|.$$

Soit $T : (E, \|\cdot\|_{\infty}) \rightarrow (E, \|\cdot\|_{\infty})$ définie par $T(P) = XP$. Démontrer que T est continue et calculer sa norme.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3272]

Exercice 52 La trace –

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la norme N définie pour tout $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ par $N(A) = \sup_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \right\}$ (on admet qu'il s'agit d'une norme). Démontrer que l'application trace $\text{Tr} : E \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, et calculer sa norme.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1537]

Exercice 53 Intégration –

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1])$ muni de $\|\cdot\|_{\infty}$ et $F = \mathcal{C}^1([0, 1])$ muni de $\|f\|_F = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty}$. Soit $T : E \rightarrow F$ défini par $Tf(x) = \int_0^x f(t) dt$. Démontrer que T est continue et calculer sa norme.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1764]

Exercice 54 Un opérateur sur les fonctions continues –

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_{\infty}$. Pour $f \in E$, on définit $L(f) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $L(f)(t) = \int_0^1 (t+u)f(u)du$.

1. Justifier que L est un endomorphisme de E .
2. Démontrer que L est continue et calculer $\|L\|_{\text{op}}$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3295]

Exercice 55 Normes (subordonnées) équivalentes –

Soit E un espace vectoriel normé et soit $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ deux normes sur E . On note $\|\cdot\|_{\text{op},1}$ et $\|\cdot\|_{\text{op},2}$ les normes subordonnées sur $\mathcal{L}_c(E)$ associées à ces deux normes. Démontrer que si $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes, alors $\|\cdot\|_{\text{op},1}$ et $\|\cdot\|_{\text{op},2}$ sont équivalentes.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3281]

Exercice 56 ★★ Opérateur de différence –

Soit E l'espace vectoriel des suites réelles bornées $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ muni de $\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$. On définit $T : (E, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (E, \|\cdot\|_\infty)$ par $Tu = v$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n$. Justifier que T est continue et calculer sa norme subordonnée.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3273]

Exercice 57 ★★ Opérateur de Cesàro –

Soit E l'espace vectoriel des suites réelles bornées $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ muni de $\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$. On définit $T : (E, \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (E, \|\cdot\|_\infty)$ par $Tu = v$ où, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k.$$

Justifier que T est continue et calculer sa norme subordonnée.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3274]

Exercice 58 ★★ Normes matricielles –

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note C_1, \dots, C_n les colonnes de A et L_1, \dots, L_n les lignes de A .

1. On munit \mathbb{R}^n de la norme $\|\cdot\|_1$. Démontrer que $\|A\| = \max_{j=1, \dots, n} \|C_j\|_1$.

2. On munit \mathbb{R}^n de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Démontrer que $\|A\| = \max_{i=1, \dots, p} \|L_i\|_1$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[3271]

Exercice 59 ★★ Étude de l'opérateur d'intégration –

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ que l'on munit de la norme

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt, \quad f \in E.$$

Soit ϕ l'endomorphisme de E défini par

$$\phi(f)(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

1. Justifier la terminologie : " ϕ est un endomorphisme de E ."

2. Démontrer que ϕ est continue.

3. Pour $n \geq 0$, on considère f_n l'élément de E défini par $f_n(x) = ne^{-nx}$, $x \in [0, 1]$. Calculer $\|f_n\|_1$ et $\|\phi(f_n)\|_1$.

4. Déterminer $\|\phi\|_{\text{op}}$.

5. ϕ est-elle injective ? surjective ?

6. Quelles sont les valeurs propres de ϕ ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1530]

Exercice 60 ★★ Formes linéaires sur les polynômes –

On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme suivante :

$$\left\| \sum_{k=0}^n a_k X^k \right\| = \sup\{|a_k|; 0 \leq k \leq n\}.$$

Pour $c \in \mathbb{R}$, on définit la forme linéaire $\phi_c : (\mathbb{R}[X], \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|), P \mapsto P(c)$. Pour quelles valeurs de c la forme linéaire ϕ_c est-elle continue ? Dans ce cas, déterminer la norme de ϕ_c .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1531]

Exercice 61 ★★★★★ **Opérateurs positifs** –

Soit $I = [a, b]$ un intervalle de \mathbb{R} . On munit $\mathcal{C}(I)$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. On dit qu'une forme linéaire $u : \mathcal{C}(I) \rightarrow \mathbb{R}$ est positive si $u(f) \geq 0$ pour tout $f \in \mathcal{C}(I)$ vérifiant $f(x) \geq 0$ si $x \in I$.

1. Démontrer que, pour toute forme linéaire $u : \mathcal{C}(I) \rightarrow \mathbb{R}$ positive, $|u(f)| \leq u(|f|)$.
2. Soit e la fonction définie par $e(x) = 1$ pour tout $x \in I$. Dédurre de la question précédente que toute forme linéaire positive est continue, et calculer $\|u\|$ en fonction de $u(e)$.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[1533]

Indication pour l'exercice 1 ▲

Indication pour l'exercice 2 ▲

Indication pour l'exercice 3 ▲

1. Pour prouver que O n'est pas ouvert pour $(E, \|\cdot\|_1)$, on pourra considérer $f \in O$ et trouver une suite g_n telle que $g_n \rightarrow f$ et $g_n(1) < 0$ (perturber f par une fonction avec une grande norme infinie et une petite norme 1...).
 - 2.
-

Indication pour l'exercice 4 ▲

1. Utiliser la caractérisation séquentielle des fermés.
 2. Trouver une fonction $f \in A_2$ telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, $B(f, \varepsilon)$ n'est pas contenue dans A_2 .
 3. On sait en plus qu'une fonction continue sur un segment atteint ses bornes....
 4. Trouver une suite (f_n) qui converge vers f dans $(F, \|\cdot\|_1)$ et qui n'est jamais dans A_3 .
-

Indication pour l'exercice 5 ▲

1. Faire un dessin !
 2. Faire un dessin !
-

Indication pour l'exercice 6 ▲

1. Soit $z = x + b$ un élément de $A + \{b\}$ avec $x \in A$. Construire une boule autour de z contenue dans $A + \{b\}$ en utilisant que A est ouvert.
 2. Utiliser la question précédente.
 3. Utiliser la caractérisation séquentielle des fermés.
 4. Observer que la première coordonnées des éléments de $A + B$ est toujours non nulle.
-

Indication pour l'exercice 7 ▲

Utiliser qu'il existe une boule ouverte centrée en 0 et contenue dans F , puis raisonner par homogénéité.

Indication pour l'exercice 8 ▲

Poser $\delta = \inf_{x \in A, y \in B} \|x - y\|$ et entourer A par un ouvert débordant de $\delta/3$.

Indication pour l'exercice 9 ▲

1. Pour la transitivité, utiliser que pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$, alors $(a, c) \subset (a, b) \cup (b, c)$.
 2. Soient a, b deux éléments de $C(x)$. Il suffit de démontrer que $(a, b) \subset C(x)$.
 3. Démontrer que $\sup(C(x)) \notin C(x)$.
 4. Un ensemble muni d'une relation d'équivalence est réunion de ses classes d'équivalence.
-

Indication pour l'exercice 10 ▲

Indication pour l'exercice 11 ▲

Si A est une partie de E à la fois ouverte et fermée telle que $A \neq \emptyset$ et $A \neq E$, alors on peut trouver $a \in A$ et $b \in E \setminus A$. On pourra ensuite travailler sur le segment $[a, b]$.

Indication pour l'exercice 12 ▲

Indication pour l'exercice 13 ▲

Si y est au bord de la boule, prendre des points qui approchent dans la boule ouverte située sur le segment joignant y au centre de la boule.

Indication pour l'exercice 14 ▲

1. Appliquer la définition, et écrire un point $\lambda x + \mu y$ comme limite d'une suite d'éléments de V de la même forme.
 2. Se ramener au fait que V contienne une boule en 0 par translation, puis raisonner par homogénéité.
 3. Utiliser la première question et le fait qu'un hyperplan est un sous-espace vectoriel maximal pour l'inclusion.
 4. Utiliser la première question à nouveau.
-

Indication pour l'exercice 15 ▲

Pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, on pourra introduire $L(f) = f(0)$ et vérifier que L est continue. Pour la norme $\|\cdot\|_1$, on pourra démontrer que F est dense dans E en approchant toute fonction f de E par une fonction f_n de F valant f sur $[1/n, 1]$ et valant 0 en 0.

Indication pour l'exercice 16 ▲

Montrer que toute fonction dérivable est limite d'une suite de fonctions qui ne sont pas dérivables partout.

Indication pour l'exercice 17 ▲

1. Pour l'intérieur, dire que $x \in \overset{\circ}{A}$ si et seulement si A est voisinage de x . Pour l'adhérence, utiliser la caractérisation séquentielle.
 2. Pour le contre-exemple, essayer avec des intervalles de \mathbb{R} .
 - 3.
-

Indication pour l'exercice 18 ▲

Pour l'adhérence, utiliser la définition à partir des suites (écrire un point $tx + (1-t)y$ comme limite d'une suite d'éléments de C). Pour l'intérieur, prendre $x, y \in \overset{\circ}{C}$ et $z \in [x, y]$. Utiliser l'homothétie de centre x qui transforme y en z . Elle transforme une boule autour de y en ...

Indication pour l'exercice 19 ▲

1. La somme de deux suites convergentes est convergente !
 2. On a $A + B = \mathbb{R} \times]0, +\infty[$.
-

Indication pour l'exercice 20 ▲

Faire des réunions d'ensembles de qui satisfont chacun une des propriétés demandées.

Indication pour l'exercice 21 ▲

1. C'est presque la définition...
 2. Utiliser la caractérisation précédente
 3. Revenir à la définition, et utiliser que A est fermé si, et seulement si, $\bar{A} = A$.
 4. Idem.
 5. Montrer que $\text{Fr}(A) \subset \overline{C_E \text{Fr}(A)}$.
-

Indication pour l'exercice 22 ▲

1. Pour démontrer l'une des deux inclusions on pourra partir de $\ell \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{u_p : p \geq n\}}$ et construire par récurrence une suite $(\phi(k))_k$ d'entiers, strictement croissante, et telle que $\|u_{\phi(k)} - \ell\| < 2^{-k}$.

2.

Indication pour l'exercice 23 ▲

1. Les inégalités se prolongent par passage à la limite...
2. L'inclusion donne des inégalités. L'une peut être stricte (donner un exemple), l'autre non (raisonner avec la définition de la borne supérieure et des ε).

3. Utiliser une inclusion et le résultat de la question précédente. Utiliser que A est bornée, et une inégalité triangulaire. Considérer une demi-droite issue de x , elle s'écrit de la forme précédente X . Prendre $t = \sup X$. Le point $x + tu$ est à la frontière de A . Prendre deux points dont la distance approche bien le diamètre de A . Puis considérer deux demi-droites issues de l'un de ces deux points. Prendre les points sur ces demi-droites à la frontière données par la question précédente. Prouver ensuite que la distance des ces points est suffisamment grande.

4. Utiliser une inclusion et le résultat de la question précédente.

5. Utiliser que A est bornée, et une inégalité triangulaire.

6. Considérer une demi-droite issue de x , elle s'écrit de la forme précédente X . Prendre $t = \sup X$. Le point $x + tu$ est à la frontière de A .

7. Prendre deux points dont la distance approche bien le diamètre de A . Puis considérer deux demi-droites issues de l'un de ces deux points. Prendre les points sur ces demi-droites à la frontière données par la question précédente. Prouver ensuite que la distance des ces points est suffisamment grande.

Indication pour l'exercice 24 ▲

Indication pour l'exercice 25 ▲

1. F est le noyau d'une forme linéaire continue.
2. Prendre une fonction g de E , et la modifier très légèrement (sur l'intervalle $[0, 1/n]$) pour qu'elle appartienne à F .

Indication pour l'exercice 26 ▲

1. Considérer le dernier entier n pour lequel $u_n \leq a$.
2. Considérer un intervalle $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ et choisir n_0 comme à la question précédente. Choisir ensuite p suffisamment grand pour qu'on puisse appliquer le résultat de la question précédente à $x + v_p$.
3. Écrire $\cos(\ln(n)) = \cos(\ln(n) - 2k\pi)$.

Indication pour l'exercice 27 ▲

1. Démontrer qu'il existe $x \in H \cap]0, +\infty[$.
2. Si $x \in H$ et $x \notin m\mathbb{Z}$, encadrer x par deux éléments successifs de $m\mathbb{Z}$ et contredire la définition de la borne inférieure.
3.
4.

Indication pour l'exercice 28 ▲

Image réciproque d'un ouvert par une application continue.

Indication pour l'exercice 29 ▲

Introduire la suite $x_n = x/2^n$.

Indication pour l'exercice 30 ▲

Majorer $|f(x) - f(y)|$ en mettant au même dénominateur et en utilisant l'inégalité triangulaire pour la norme.

Indication pour l'exercice 31 ▲

Déterminer la bijection réciproque ! Si on cherche à résoudre $y = g(x)$, on pourra commencer par calculer la norme de x .

Indication pour l'exercice 32 ▲

Prouver que φ est 1-lipschitzienne.

Indication pour l'exercice 33 ▲

1. Si $x \notin A$, alors $d(x, A) > 0$.
 2. Construire une telle fonction à partir de $d(x, A)$ et $d(x, B)$. La condition $d(x, A) + d(x, B) > 0$ incite à mettre cette quantité au dénominateur.
 3. Utiliser des images réciproques de deux ouverts disjoints par la fonction précédente.
-

Indication pour l'exercice 34 ▲

1. Écrire la définition de la partie entière.
 2. Calculer $f(p)$ pour $p \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ puis $f(p/2^n)$.
 3. On pourra considérer la fonction affine g valant la même valeur que f en 0 et en 1.
-

Indication pour l'exercice 35 ▲

1. Fixer un élément a de A et évaluer $\|f(x)\|$ en fonction de $\|f(a)\|$ et du diamètre de A .
 - 2.
 3. Prendre une suite (k_n) qui converge vers C_f et passer à la limite dans une inégalité.
 4. Démontrer que $C_f + C_g$ est dans K_{f+g} (utiliser que $C_f \in K_f$).
 - 5.
 6. Majorer $\|f(b)\|$ en fonction de $\|f(a)\|$, du diamètre de A et de C_f .
-

Indication pour l'exercice 36 ▲

Non !

Indication pour l'exercice 37 ▲

1. Utiliser le fait que $(|x| - |y|)^2$ est positif.
 2. C'est une simple application de l'inégalité triangulaire.
-

Indication pour l'exercice 38 ▲

1. Il suffit d'étudier la fonction limite de chaque fonction coordonnée.
 2. Que vaut $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(t)}{t^2}$?
 3. Étudier la limite de $f(t, t^\alpha)$ pour α bien choisi.
 4. Majorer $|x|$ par une certaine puissance de $x^8 + y^6$, et faire la même chose pour y .
-

Indication pour l'exercice 39 ▲

Partir de $|x| \leq (x^2 + y^2)^{1/2}$.

Indication pour l'exercice 40 ▲

Faire tendre (x, y) vers $(0, 0)$ sur la droite $y = x$.

Indication pour l'exercice 41 ▲

Séparer le domaine en trois parties.

Indication pour l'exercice 42 ▲

Faire apparaître une composée de deux fonctions.

Indication pour l'exercice 43 ▲

Le théorème des accroissements finis pourra être d'une grande aide !

Indication pour l'exercice 44 ▲

1. Se ramener à une fonction d'une variable réelle et au théorème des valeurs intermédiaires.
 - 2.
-

Indication pour l'exercice 45 ▲

1. g est bornée sur $[0, 1]$.
 2. Calculer $T(X^k)$.
 - 3.
 4. Faire un calcul direct.
 5. Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
-

Indication pour l'exercice 46 ▲

1. Il suffit de majorer $N_1(P)$.
 2. Que vaut $N_2(X^k)$? et $N_2(T(X^k))$?
-

Indication pour l'exercice 47 ▲

1. Non !
 2. Oui !
-

Indication pour l'exercice 48 ▲

Quelles sont les valeurs propres et les vecteurs propres de D ?

Indication pour l'exercice 49 ▲

1. Pour démontrer que $\|u\| = 0 \implies u = 0$, utiliser $x = y/\|y\|$ pour tout $y \neq 0$. Pour l'inégalité triangulaire, utiliser l'inégalité triangulaire de la norme sur E .
 - 2.
-

Indication pour l'exercice 50 ▲

1. Télescopage !
 2. Prendre y dans l'intersection et calculer de deux façons différentes $v_n(y)$.
 3. Théorème du rang !
 - 4.
-

Indication pour l'exercice 51 ▲

Indication pour l'exercice 52 ▲

Pour le calcul de la norme, calculer la trace de I_n .

Indication pour l'exercice 53 ▲

Pour prouver la continuité, majorer... Pour calculer la norme, calculer T d'une fonction constante.

Indication pour l'exercice 54 ▲

-
1. La fonction $L(f)$ est affine !
 2. Majorer le plus simplement possible pour prouver la continuité. Pour calculer $\|L\|_{\text{op}}$, on pourra penser aux fonctions constantes.
-

Indication pour l'exercice 55 ▲

Considérer $T \in \mathcal{L}_c(E)$, $x \in E$, et majorer $\|Tx\|_1$ par $\|x\|_1$, mais en passant par $\|\cdot\|_2$.

Indication pour l'exercice 56 ▲

Indication pour l'exercice 57 ▲

La majoration de $\|Tu\|_\infty$ se fait tout simplement en prenant l'inégalité triangulaire. Pour calculer la norme de T , on pourra considérer une suite constante.

Indication pour l'exercice 58 ▲

-
1. Choisir $X \in \mathbb{R}^n$ et majorer $\|AX\|_1$ en utilisant l'inégalité triangulaire et en permutant les sommes. Ceci donnera une inégalité. Pour prouver l'égalité, choisir X_0 tel que X_0 a toutes ses composantes nulles sauf une...
 2. Cette fois, il faut majorer $|(AX)_i|$ pour tout $i = 1, \dots, n$. A nouveau, on peut majorer un utilisant l'inégalité triangulaire. Pour prouver l'égalité, on choisit i_0 tel que $\|L_{i_0}\|_1$ est maximal, puis $X = (\varepsilon_j)$ avec $\varepsilon_j a_{i_0,j} = |a_{i_0,j}|$.
-

Indication pour l'exercice 59 ▲

-
- 1.
 2. Montrer que $|\phi(f)(x)| \leq \|f\|_1$.
 - 3.
 - 4.
 - 5.
 6. Considérer $f \in E$ tel que $\phi(f) = \lambda f$. Démontrer que f est un multiple d'une fonction exponentielle, puis que $f = 0$.
-

Indication pour l'exercice 60 ▲

Traiter séparément les cas $|c| < 1$ et $|c| \geq 1$. On pourra introduire $P_n(X) = 1 + X + \dots + X^n$ et $Q_n(X) = 1 - X + \dots + (-1)^n X^n$.

Indication pour l'exercice 61 ▲

-
1. Utiliser $|f| - f \geq 0$ et $|f| + f \geq 0$.
 2. Ecrire $|f| \leq \|f\|_\infty e$.
-

Correction de l'exercice 1 ▲

A et F sont ouverts. B est fermé, les autres ne sont ni ouverts ni fermés. Voici une preuve variant les techniques :

1. A est ouvert. En effet, si $(x, y) \in A$, alors $0 < |x - 1| < 1$, c'est-à-dire que $x \neq 1$ et $0 < x < 2$. On sait alors qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $1 \notin]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ et $0 < x - \varepsilon < x + \varepsilon < 2$. Alors, $B((x, y), \varepsilon)$ (pour la norme infinie) est contenue dans A . A n'est pas fermé, car la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ définie pour $n \geq 2$ par $u_n = (1/n, 0)$ est une suite d'éléments de A qui converge vers $(0, 0)$ qui n'est pas dans A .

2. B est fermé. Si $(x_n, y_n)_{n \geq 1}$ est une suite d'éléments de B qui converge vers (x, y) , alors on sait que pour chaque entier n , on a $0 \leq x_n \leq y_n$. En passant à la limite, on en déduit que $0 \leq x \leq y$ et donc que $(x, y) \in B$. B n'est pas ouvert : le point $(0, 0)$ est élément de B mais dans toute boule contenant $(0, 0)$, il y a des points qui ne sont pas dans B (les points du type $(-\varepsilon, 0)$ par exemple, avec $\varepsilon > 0$ assez petit).

3. C n'est pas fermé, car si $u_n = (1 - \frac{1}{n}, 1)$, (u_n) est une suite d'éléments de C qui converge vers $(1, 1)$ qui n'est pas dans C . C n'est pas ouvert, car toute boule contenant le point $(0, 1)$, qui est dans C , contient des éléments qui ne sont pas dans C (par exemple les points $(0, 1 + \varepsilon)$ avec $\varepsilon > 0$ assez petit).

4. D n'est pas fermé : si (r_n) est une suite de rationnels convergeant vers $\sqrt{2}$, alors la suite $(r_n, 0)$ est une suite d'éléments de D qui converge vers $(\sqrt{2}, 0)$ qui n'est pas élément de D . D n'est pas ouvert. Dans toute boule de centre $(0, 0)$, qui est élément de D , il existe des éléments qui ne sont pas dans D , par exemple les éléments du type $(0, \sqrt{2}/n)$.

5. E n'est pas ouvert car son complémentaire, D , n'est pas fermé. E n'est pas fermé car son complémentaire n'est pas ouvert.

6. F est ouvert car c'est l'image réciproque de l'intervalle ouvert $] -\infty, 4[$ par la fonction continue $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + y^2$. F n'est pas fermé, car la suite (u_n) définie par $u_n = (2 - \frac{1}{n}, 0)$ est une suite d'éléments de D qui converge vers $(2, 0)$ qui n'est pas élément de F .

Correction de l'exercice 2 ▲

\mathbb{N} et \mathbb{Z} sont fermés, car toute suite d'entiers naturels (resp. d'entiers relatifs) convergente a sa limite qui est un entier naturel (resp. un entier relatif). \mathbb{N} et \mathbb{Z} ne sont pas ouverts. En effet, $0 \in \mathbb{N}$ et aucune boule ouverte centrée en 0 n'est contenue dans \mathbb{N} (une boule ouverte est ici un intervalle ouvert du type $] -\varepsilon, \varepsilon[$). \mathbb{Q} n'est ni fermé, ni ouvert. Il n'est pas fermé, car par exemple il existe une suite de rationnels qui converge vers l'irrationnel $\sqrt{2}$. Il n'est pas ouvert, car par exemple tout intervalle ouvert centré en 0 contient des irrationnels. $[0, 1[$ n'est pas fermé. La suite (u_n) définie par $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ pour $n \geq 2$ est contenue dans $[0, 1[$, converge vers 1, mais $1 \notin [0, 1[$. $[0, 1[$ n'est pas ouvert, car aucun intervalle ouvert centré en 0 n'est contenu dans $[0, 1[$. Pour la même raison, $[0, +\infty[$ n'est pas ouvert. En revanche, $[0, +\infty[$ est fermé : pour toute suite (x_n) de réels positifs qui converge vers ℓ , alors ℓ est un réel positif. $]0, 1[\cup \{2\}$ n'est pas fermé (prendre la même suite que ci-dessus), et n'est pas non plus ouvert (considérer les intervalles ouverts centrés en 2). $\{1/n, n \in \mathbb{N}^*\}$ n'est pas ouvert (considérer les intervalles ouverts centrés en 1), et n'est pas non plus fermé. En effet, la suite (x_n) définie par $x_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geq 1$ est contenue dans cet ensemble, mais sa limite, 0, ne l'est pas. Enfin, on peut remarquer que $\bigcap_{n \geq 1}] -1/n, 1/n[= \{0\}$. En effet, si $x \in \bigcap_{n \geq 1}] -1/n, 1/n[$, alors pour tout $n \geq 1$, on a $-1/n \leq x \leq 1/n$ et donc par passage à la limite, $x = 0$. Ainsi, cet ensemble est fermé, mais pas ouvert (bien que ce soit une intersection d'ouverts!).

Correction de l'exercice 3 ▲

1. On va commencer par prouver que O est un ouvert de $(E, \|\cdot\|_\infty)$. Soit $f \in O$ et posons $r = f(1)$. Alors $B_\infty(f, r) \subset O$. En effet, si $g \in B_\infty(f, r)$, alors

$$g(1) \geq f(1) + g(1) - f(1) \geq f(1) - \|f - g\|_\infty > f(1) - f(1) = 0.$$

En revanche, O n'est pas un ouvert de $(E, \|\cdot\|_1)$. En effet, considérons $f \in O$ et $r > 0$ quelconque. Pour $n \geq 1$, posons $g_n = f - f(1)x^n$. Alors $\|g_n - f\|_1 = f(1) \int_0^1 x^n dx = \frac{f(1)}{n+1} \rightarrow 0$. Ainsi, pour n assez grand, $g_n \in B_1(f, r)$. En revanche, g_n n'est jamais élément de O . En effet, on a $g_n(1) = f(1) - f(1) = 0$.

2. On prouve que $E \setminus F = \{f \in E : \int_0^{1/2} f(t) dt > 0\}$ est ouvert pour $\|\cdot\|_\infty$ et aussi pour $\|\cdot\|_1$. Soit $f \in E \setminus F$

et commençons par traiter le cas de la norme infinie. Soit $r = \int_0^{1/2} f(t)dt > 0$ et $g \in B_\infty(f, r)$. Alors

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} g(t)dt &= \int_0^{1/2} f(t)dt + \int_0^{1/2} (g(t) - f(t))dt \\ &\geq \int_0^{1/2} f(t)dt - \int_0^{1/2} |g(t) - f(t)|dt \\ &\geq \int_0^{1/2} f(t)dt - \int_0^{1/2} \|g - f\|_\infty dt \\ &\geq \int_0^{1/2} f(t)dt - \int_0^{1/2} r dt \\ &\geq r - \frac{r}{2} > 0 \end{aligned}$$

Ainsi $B_\infty(f, r) \subset E \setminus F$ et F est bien un fermé de $(E, \|\cdot\|_\infty)$. Passons à la norme 1. On va prouver qu'on a toujours $B_1(f, r) \subset E \setminus F$. En effet, si $g \in B_1(f, r)$, alors

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} g(t)dt &= \int_0^{1/2} f(t)dt + \int_0^{1/2} g(t) - f(t) \\ &\geq \int_0^{1/2} f(t)dt - \int_0^{1/2} |g(t) - f(t)|dt \\ &\geq \int_0^{1/2} f(t)dt - \int_0^1 |g(t) - f(t)|dt \\ &> r - r = 0 \end{aligned}$$

Remarquons qu'on aurait pu conclure que O est un ouvert pour $(E, \|\cdot\|_\infty)$ et que F est un fermé pour $(E, \|\cdot\|_\infty)$ et $(E, \|\cdot\|_1)$ en remarquant que ce sont respectivement l'image réciproque d'un ouvert ou d'un fermé de \mathbb{R} par une forme linéaire continue.

Correction de l'exercice 4 ▲

1. A_1 est fermé. Pour cela, on peut utiliser la caractérisation séquentielle. En effet, prenons une suite (f_n) de A_1 qui converge vers $f \in E$, et prouvons que $f \in A_1$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors on sait que $f_n(x) \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, on sait que

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty$$

et donc que $f_n(x) \rightarrow f(x)$. On en déduit par passage à la limite que $f(x) \geq 0$, et comme c'est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f \in A_1$.

2. On va prouver que A_2 n'est pas ouvert. En effet, on va trouver une fonction $f \in A_2$ telle que, pour tout $\varepsilon > 0$, $B(f, \varepsilon)$ n'est pas contenu dans A_2 . Prenons par exemple la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Alors f est dans A_2 . Soit $\varepsilon > 0$ et considérons g définie par $g(x) = f(x) - \varepsilon/2$. Il est clair que $g \in B(f, \varepsilon)$. Mais si x_0 est tel que $f(x_0) < \varepsilon/2$ (ce qui est possible si x_0 est assez grand puisque $\lim_{+\infty} f = 0$), alors $g(x_0) < 0$ et donc $g \notin A_2$. Ainsi, A_2 n'est pas ouvert.

3. On va prouver cette fois que A_3 est ouvert dans $(F, \|\cdot\|_\infty)$. Fixons en effet $f \in A_3$. Par rapport à la question précédente, on a des informations supplémentaires : f est continue et on ne s'intéresse qu'au segment $[0, 1]$. Sur ce segment, f atteint son minimum : il existe $x_0 \in [0, 1]$ tel que, pour tout $x \in [0, 1]$, on a $f(x) \geq f(x_0)$. Remarquons que $f(x_0) > 0$ et posons $\varepsilon = f(x_0)/2$. Alors, pour tout $g \in B_\infty(f, \varepsilon)$, on a $g \in A_3$. En effet, pour tout $x \in [0, 1]$, on a

$$g(x) \geq f(x) - \varepsilon \geq f(x_0) - \varepsilon \geq \varepsilon/2 > 0.$$

Ainsi, A_3 est ouvert dans $(F, \|\cdot\|_\infty)$.

4. On va vérifier qu'en changeant de norme, on peut passer d'un ensemble ouvert à un ensemble qui ne l'est plus. Prenons f la fonction identiquement égale à 1, qui est bien sûr élément de A_3 . On va prouver que, pour tout $\varepsilon > 0$, la boule $B_1(f, \varepsilon)$ n'est pas contenue dans A_3 . Pour cela, il suffit de trouver une suite (f_n) de F telle que, pour n assez grand, $\|f_n - f\|_1 < \varepsilon$ et $f_n \notin A_3$. Posons pour $n \geq 1$ $f_n(x) = 1 - x^n$. Alors $f_n(1) = 0$ et donc $f_n \notin A_3$. De plus,

$$\|f_n - f\|_1 = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0.$$

Donc pour n assez grand, $f_n \in B_1(f, \varepsilon)$. Ainsi, on a bien prouvé que A_3 n'est pas un ouvert de $(F, \|\cdot\|_1)$.

Correction de l'exercice 5 ▲

1. Il est bien connu que le disque de centre A de rayon r est contenu dans le disque de centre B de rayon R si et seulement si $AB + r \leq R$ (ce dont on peut se convaincre facilement en faisant un dessin). Ici, on en déduit que $B_{n+1} \subset B_n$ si et seulement si

$$\sqrt{2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)^2} \leq \frac{\lambda}{n} - \frac{\lambda}{n+1}$$

c'est-à-dire si et seulement si $\lambda \geq \sqrt{2}$.

2. Si $\lambda \geq \sqrt{2}$, les ensembles sont emboîtés les uns dans les autres et $B = B_1$ qui est fermé. Si $\lambda < \sqrt{2}$, alors on vérifie facilement que $(0,0)$ n'est élément d'aucun ensemble B_n . Or, la suite des centres de B_n , $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, est contenue dans B et converge vers $(0,0)$ qui n'est pas dans B . Donc B n'est pas fermé. Ainsi, on a prouvé que B est fermé si et seulement si $\lambda \geq \sqrt{2}$.

Correction de l'exercice 6 ▲

1. Soit $z \in A + \{b\}$, $z = x + b$ avec $x \in A$. Puisque A est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset A$. Mais alors, $B(z, \varepsilon) = B(x + b, \varepsilon) \subset A + b$. En effet, si y est élément de cette boule, $N((y - b) - x) < \varepsilon$, et donc $y - b = a$ avec $a \in B(x, \varepsilon) \subset A$. D'où $y = a + b \in A + \{b\}$.

2. Remarquons que :

$$A + B = \bigcup_{b \in B} A + \{b\}.$$

La réunion d'une famille (quelconque) d'ouverts étant un ouvert et puisque $A + \{b\}$ est ouvert d'après la question précédente, on obtient que $A + B$ est ouvert.

3. Soit $(u_n) = (x_n, y_n)$ une suite d'éléments de A , convergeant vers $u = (x, y)$. Alors pour tout entier n , on a $x_n y_n = 1$ et donc en passant à la limite, $xy = 1$ ce qui prouve que $u \in A$. Par la caractérisation séquentielle des fermés, on en déduit que A est fermé. B est lui-aussi fermé, en utilisant une démonstration tout à fait similaire, ou parce que le produit cartésien de deux fermés est un fermé.

4. Considérons la suite $(u_n) = (1/n, 1)$. Alors c'est une suite d'éléments de $A + B$ car elle s'écrit $u_n = a_n + b_n$ avec $a_n = (1/n, n) \in A$ et $b_n = (0, 1 - n) \in B$. Elle converge vers $(0, 1)$, qui n'est pas un élément de $A + B$ car tout élément de $A + B$ a sa première coordonnée non nulle.

Correction de l'exercice 7 ▲

Si F est ouvert, alors puisque $0 \in F$, il existe $r > 0$ tel que $B(0, r) \subset F$. Mais alors, prenons $x \in E$, $x \neq 0$. Alors $y = \frac{rx}{2\|x\|}$ a pour norme $r/2$, c'est donc un élément de F . Puisque F est stable par multiplication par un scalaire, $x = \frac{2\|x\|}{r}y$ est élément de F et donc $F = E$.

Correction de l'exercice 8 ▲

Posons $\delta = \inf_{x \in A, y \in B} \|x - y\| > 0$ et soit $U = \bigcup_{a \in A} B(a, \delta/3)$, $V = \bigcup_{b \in B} B(b, \delta/3)$. Alors U et V sont deux ouverts comme réunion (quelconque) d'ouverts. De plus, il est clair que $A \subset U$ et que $B \subset V$. Enfin, si $x \in U$ et $y \in V$, alors il existe $a \in A$ et $b \in B$ avec $\|x - a\| < \delta/3$ et $\|y - b\| < \delta/3$. De plus, on sait que $\|a - b\| \geq \delta$. Il vient en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$\|x - y\| \geq \|a - b\| - \|a - x\| - \|b - y\| \geq \delta - \frac{\delta}{3} - \frac{\delta}{3} = \frac{\delta}{3} > 0.$$

Ainsi, on a bien $x \neq y$ et $U \cap V = \emptyset$.

Correction de l'exercice 9 ▲

Dans cet exercice, on utilisera plusieurs fois que pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$, alors $(a, c) \subset (a, b) \cup (b, c)$.

1. La réflexion est clairement symétrique et réflexive. De plus, elle est transitive. Si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $(x, y) \subset U$ et $(y, z) \subset U$. Puisque $(x, z) \subset (x, y) \cup (y, z) \subset U$, on a bien $x\mathcal{R}z$ et la relation est transitive.

2. Soient a, b deux éléments de $C(x)$. Il suffit de démontrer que $(a, b) \subset C(x)$. Mais $(a, x) \subset U$ et $(b, x) \subset U$ et donc $(a, b) \subset U$. En particulier, prenons $y \in (a, b)$. Alors $(a, y) \subset U$ et $(a, x) \subset U$ et donc $(x, y) \subset U$, ce qui prouve que $y \in C(x)$ et donc que $C(x)$ est un intervalle.

3. Supposons d'abord que $C(x)$ est majoré et minoré, et notons $y = \sup C(x)$. Si $y \in C(x)$, alors l'intervalle $[x, y] \subset U$. Mais puisque U est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[y, y + \varepsilon] \subset U$. Mais alors $[x, y + \varepsilon] \subset U$ et donc $y + \varepsilon \in C(x)$, ce qui contredit la définition de y . On démontre de même que $\inf C(x) \notin C(x)$. Puisque $C(x)$ est un intervalle, on a $] \inf C(x), \sup C(x)[= C(x)$, qui est un intervalle ouvert, donc un ouvert. Si $C(x)$ n'est pas majoré, mais minoré, alors $C(x)$ est un intervalle non majoré, il est de la forme $[a, +\infty[$ ou $]a, +\infty[$, et le raisonnement précédent montre qu'il est en fait de la forme $] \inf C(x), +\infty[$. On procède de la même façon si on suppose que $C(x)$ n'est pas minoré.

4. U est réunion disjointe des classes d'équivalence pour la relation \mathcal{R} . Ces classes d'équivalence sont des intervalles ouverts d'après la question précédente. Donc U est réunion disjointe d'intervalles ouverts. En utilisant le fait que \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} , et que \mathbb{Q} est dénombrable, on pourrait en fait démontrer que U est une réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints.

Correction de l'exercice 10 ▲

L'une des difficultés, dans cet exercice, vient des notations. Si on veut utiliser la caractérisation séquentielle des fermés, on va avoir besoin de suites d'éléments de E , c'est-à-dire de suites de suites. Commençons par démontrer que A est fermé. Soit $(u(k))$ une suite d'éléments de A , qui converge vers un élément $u \in E$. Chaque $u(k)$ est une suite croissante. Donc, pour tout entier $n \geq 1$, on a $u_n(k) \leq u_{n+1}(k)$. Si on fait tendre k vers $+\infty$, on en déduit que

$$u_n \leq u_{n+1}$$

et donc que la suite u est croissante. Ainsi, A est bien fermé. Démontrons que B est également fermé. Soit $(u(k))$ une suite d'éléments de B , qui converge vers un élément $u \in E$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier k tel que

$$\|u - u(k)\|_\infty \leq \varepsilon,$$

ce qui signifie que, pour tout $n \geq 1$, on a

$$|u_n - u_n(k)| \leq \varepsilon.$$

Ce k étant fixé, il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a $|u_n(k)| \leq \varepsilon$. D'après l'inégalité triangulaire, pour tout $n \geq n_0$, on a

$$|u_n| \leq |u_n - u_n(k)| + |u_n(k)| \leq 2\varepsilon.$$

Ainsi, on en tire que u converge vers 0. u est un élément de B , et donc B est fermé. On va enfin prouver que C n'est pas fermé. Pour tout $p \geq 1$, notons $\delta(p)$ la suite $(1, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1, \dots)$ où les 1 se situent aux indices multiples de p : autrement dit, $\delta_n(p) = 1$ si et seulement si $p|n$, et $\delta_n(p) = 0$ sinon. Alors $\delta(p)$ est une suite périodique (et bornée). De plus, il est facile de voir que toute combinaison linéaire des suites $\delta(p)$ est encore périodique. Posons, pour $P \geq 1$,

$$u(P) = \sum_{p=1}^P \frac{1}{2^p} \delta(p)$$

et u la suite (u_n) telle que, pour tout $n \geq 0$,

$$u_n = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{2^p} \delta_n(p).$$

La dernière série qui apparaît est effectivement convergente, et $0 \leq u_n \leq 1$ de sorte que $u \in E$. De plus, pour tout $n \geq 0$, et pour tout $P \geq 1$, on a

$$|u_n - u_P(n)| = \sum_{p=P+1}^{+\infty} \frac{1}{2^p} \delta_n(p) \leq \sum_{p=P+1}^{+\infty} \frac{1}{2^p} \rightarrow 0.$$

Ainsi, $(u(P))$ converge vers u dans E . Finalement, on remarque que chaque $u(P)$ est périodique, donc élément de C , alors que u ne l'est pas. En effet, on a $u_0 = 1$ et $u_n < 1$ pour tout $n \geq 1$. Donc C n'est pas fermé.

Correction de l'exercice 11 ▲

On commence par remarquer que \emptyset et E sont des parties à la fois ouvertes et fermées de E . Réciproquement, soit A une partie de E à la fois ouverte et fermée. Supposons $A \neq \emptyset$ et $A \neq E$. On peut alors trouver $a \in A$ et $b \in E \setminus A$. Considérons ensuite

$$I = \{t \in [0, 1] : (1-t)a + tb \in A\}.$$

Alors I est une partie non vide de \mathbb{R} car $0 \in I$ et I est majorée par 1. Elle admet une borne supérieure s . Soit (t_n) une suite de I qui converge vers s . Alors $(1-t_n)a + t_nb \in A$. Comme A est fermé, par passage à la limite, $(1-s)a + sb \in A$. Si $s = 1$, alors il y a une contradiction avec $b \in E \setminus A$. Si $s < 1$, alors notons $x_0 = (1-s)a + sb$. Puisque A est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x_0, r) \subset A$. Mais alors, il existe $t \in]s, 1[$ tel que $ta + (1-t)b \in B(x_0, r) \subset A$. Ceci contredit que s est la borne supérieure de I .

Correction de l'exercice 12 ▲

1. Remarquons d'abord que A est une partie ouverte (c'est le demi-plan droit strict) : si $(x, y) \in A$, alors $B((x, y), x/2)$ est contenue dans A . Ainsi, $\overset{\circ}{A} = A$. D'autre part, on a $\bar{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0\}$. En effet, si (x_n, y_n) est une suite de A qui converge vers (x, y) , alors par passage à la limite $x \geq 0$, ce qui prouve que $\bar{A} \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0\}$. Réciproquement, soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \geq 0$. Alors, si $x > 0$, $(x, y) \in A \subset \bar{A}$ et si $x = 0$, alors prenons la suite (x_n, y_n) définie par $x_n = x + \frac{1}{n}$, $y_n = y$. (x_n, y_n) est une suite de A qui converge vers (x, y) , ce qui démontre l'inclusion réciproque.

2. On montre facilement que B est fermé, et donc que $\bar{B} = B$. D'autre part, $\overset{\circ}{B} = \emptyset$. En effet, si $(x, y) \in B$, il existe une suite (x_n, y_n) qui n'est pas dans B et qui converge vers x , par exemple $x_n = x + \frac{1}{n}$ et $y_n = y$, on a $x_n y_n = 1 + \frac{y}{n} \neq 1$ puisque $y \neq 0$.

3. On remarque d'abord que cet ensemble est ouvert (le plus facile est de dire qu'il s'agit de l'image réciproque de l'ouvert $]1, +\infty[$ par l'application continue $\phi(x, y) = xy$). Ainsi, $\overset{\circ}{C} = C$. D'autre part, par une démonstration semblable à la démonstration effectuée pour A , on démontre que $\bar{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy \geq 1\}$.

4. On va écrire l'ensemble D autrement :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \geq 1\}.$$

Remarquons que D est fermé, et donc $\bar{D} = D$. D'autre part, l'intérieur de l'intersection vaut l'intersection des intérieurs. On a donc :

$$\overset{\circ}{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 2\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 > 1\}.$$

La frontière est alors :

$$\begin{aligned} \text{Fr}(D) &= (\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 2\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 = 1\}) \\ &\cup (\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 2\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \geq 1\}). \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 13 ▲

Soit $B = B(x, R)$ une telle boule ouverte, et $y \in \bar{B}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe z dans B avec $\|z - y\| \leq \varepsilon$. On en déduit par l'inégalité triangulaire que :

$$\|y - x\| \leq R + \varepsilon,$$

et donc puisque ceci est vérifié pour tout $\varepsilon > 0$, $\|y - x\| \leq R$, ce qui montre une inclusion. D'autre part, si y est dans la boule fermée de centre x et de rayon R , il suffit de se restreindre à y sur la sphère, et si ε est un réel positif, on considère :

$$z = x + (R - \varepsilon) \frac{y - x}{R}.$$

Alors, on a $\|z - x\| \leq R - \varepsilon \implies z \in B$ et $\|z - y\| \leq \varepsilon$. Ceci montre que $y \in \bar{B}$. Bien sûr, on aurait pu faire toute la preuve avec la caractérisation séquentielle, en remplaçant ε par $1/n$ avec $n \rightarrow +\infty$.

Correction de l'exercice 14 ▲

1. Soit $x, y \in \bar{V}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. x (resp. y) est limite d'une suite (x_n) (resp. (y_n)) d'éléments de V . Puisque V est un sous-espace vectoriel, la suite

$$z_n = \lambda x_n + \mu y_n$$

évolue dans V . On passe à la limite : z_n converge vers $z = \lambda x + \mu y$, qui est élément de \bar{V} puisque $z_n \in V$.

2. Soit $a \in V$ et $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subset V$. Soit $x \in B(0, \varepsilon)$. Puisque $x + a \in B(a, \varepsilon) \subset V$ et que V est un espace vectoriel, on a $x \in V$. D'où $B(0, \varepsilon) \subset V$. Si maintenant $x \neq 0$ est dans E , alors $z = \frac{\varepsilon x}{2\|x\|}$ est dans $B(0, \varepsilon)$, donc dans V , et puisque V est un sous-espace vectoriel, c'est aussi le cas de x .

3. Soit H un hyperplan de E . Alors \bar{H} est un sous-espace vectoriel de E et $H \subset \bar{H}$. Par définition d'un hyperplan (sous-espace vectoriel maximal pour l'inclusion), alors ou bien $H = \bar{H}$ et H est fermé, ou bien $\bar{H} = E$ et H est dense.

4. On a $A \subset \text{vect}(A)$ et donc $\bar{A} \subset \overline{\text{vect}(A)}$. Mais $\overline{\text{vect}(A)}$ est un sous-espace vectoriel de E et on a

$$\text{vect}(\bar{A}) \subset \text{vect}(\overline{\text{vect}(A)}) = \overline{\text{vect}(A)}.$$

Correction de l'exercice 15 ▲

Introduisons $L(f) = f(0)$. Alors, pour tout $f \in E$, $|L(f)| \leq \|f\|_\infty$. Ainsi, la forme linéaire L est continue de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Puisque $F = L^{-1}(\{0\})$, F est un fermé de E pour $\|\cdot\|_\infty$. Ceci ne fonctionne plus avec la norme $\|\cdot\|_1$, et on va au contraire prouver que F est dense dans E pour cette norme. Pour cela, fixons $f \in E$ et, pour $n \geq 1$, considérons f_n la fonction de E qui est égale à f sur $[1/n, 1]$ et qui est affine sur $[0, 1/n]$, avec de plus $f_n(0) = 0$ de sorte que $f_n \in F$. Alors on a

$$\|f_n - f\|_1 = \int_0^{1/n} |f_n(t) - f(t)| dt.$$

Mais, pour tout $t \in [0, 1/n]$, $|f(t)| \leq \|f\|_\infty$. De même, pour tout $t \in [0, 1/n]$, on a

$$|f_n(t)| \leq |f_n(1/n)| = |f(1/n)| \leq \|f\|_\infty.$$

Ainsi,

$$\|f_n - f\|_1 \leq \int_0^{1/n} (|f(t)| + |f_n(t)|) dt \leq \frac{2\|f\|_\infty}{n}.$$

On a bien $f_n \rightarrow f$ pour la norme $\|\cdot\|_1$, et F est dense dans E .

Correction de l'exercice 16 ▲

On va prouver que l'intérieur de D est vide. Pour cela, prenons $f \in D$ et construisons une suite de fonctions f_n dans D^c qui converge vers f pour $\|\cdot\|$. Pour cela, considérons $g(x) = |x - \frac{1}{2}|$, de sorte que $\|g\|_\infty = \frac{1}{2}$. Mais alors, posons

$$f_n(x) = f(x) + \frac{1}{n}g(x).$$

Alors $\|f_n - f\|_\infty = \frac{1}{n}\|g\|_\infty \leq \frac{1}{2n} \rightarrow 0$. Et de plus, f_n n'est pas dérivable en $1/2$ car g ne l'est pas alors que f l'est. Donc $f_n \in D^c$, ce qui achève la preuve que l'intérieur de D est vide. Puisque $P \subset D$, l'intérieur de P est vide lui aussi.

Correction de l'exercice 17 ▲

1. Si $x \in \mathring{A}$, alors A est voisinage de x . Puisque $A \subset B$, B est aussi voisinage de x et $x \in \mathring{B}$. D'autre part, si $x \in \bar{A}$, il existe une suite (x_n) de A qui converge vers x . Mais (x_n) est aussi une suite de B et donc $x \in \bar{B}$.

2. D'une part, on a $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$, donc par la question précédente, on a $(A \cap B)^\circ \subset \mathring{A}$ et $(A \cap B)^\circ \subset \mathring{B}$ d'où $(A \cap B)^\circ \subset \mathring{A} \cap \mathring{B}$. Réciproquement, si $x \in \mathring{A} \cap \mathring{B}$, il existe $r_1 > 0$ tel que $B(x, r_1) \subset A$ et il existe $r_2 > 0$ tel

que $B(x, r_2) \subset B$. Posons $r = \min(r_1, r_2) > 0$. Alors $B(x, r) \subset A \cap B$ et donc $x \in (A \cap B)^\circ$. De la même façon, de $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$, on tire $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset (A \cup B)^\circ$. Prenons maintenant $A =]0, 1]$ et $B = [1, 2]$. Alors $\overset{\circ}{A} =]0, 1[$, $\overset{\circ}{B} =]1, 2[$ et $(A \cup B)^\circ =]0, 2[$. En particulier, $1 \in (A \cup B)^\circ$ alors que $1 \notin \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$.

3. De la même façon qu'à la question précédente, en utilisant le résultat de la première question, on a $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. La première inclusion peut être stricte. En effet, prenons $A =]0, 1[$ et $B =]1, 2[$, de sorte que $A \cap B = \emptyset$ alors que $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$. La seconde inclusion est une égalité. Prenons $x \in \overline{A \cup B}$. Alors x est limite d'une suite (x_n) à valeurs dans $A \cup B$. Mais ou bien il y a une infinité de termes de (x_n) qui sont dans A , ou bien il y a une infinité de termes de (x_n) qui sont dans B . Dans le premier cas, $x \in \overline{A}$ et dans le second, $x \in \overline{B}$. Dans tous les cas, $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$. Remarquons que l'on aurait aussi pu déduire les résultats de cette question à partir des résultats de la question précédente en passant au complémentaire, puisque $(\bar{A})^c = (A^c)^\circ$ etc...

Correction de l'exercice 18 ▲

Soit $x, y \in \bar{C}$, et $t \in [0, 1]$. x (resp. y) est limite d'une suite (x_n) (resp. (y_n)) d'éléments de C . Puisque C est convexe, la suite

$$z_n = tx_n + (1-t)y_n$$

est dans C . On passe à la limite : la suite (z_n) converge vers $tx + (1-t)y$, et cette limite est dans \bar{C} . D'où $tx + (1-t)y \in \bar{C}$, ensemble qui est donc convexe. Prouvons maintenant le résultat concernant l'intérieur. Soit $x, y \in \overset{\circ}{C}$, $x \neq y$, et soit $z \in]x, y[$. Alors il existe une (unique) homothétie de centre x qui envoie y sur z (une homothétie de centre x est une application de la forme $w \mapsto x + \lambda(w - x)$). Cette homothétie transforme la boule de centre y et de rayon δ en la boule de centre z et de rayon $\lambda\delta$. Soit $\delta > 0$ tel que $B(y, \delta) \subset C$ et soit $w \in B(z, \lambda\delta)$. Alors $w = h(u)$, avec u un point de $B(y, \delta)$, et h l'homothétie précédemment considérée. En particulier, w est sur le segment $[x, u]$ et est donc un élément de C . Autrement dit, on vient de prouver que $B(z, \lambda\delta) \subset C$, ce qui prouve $z \in \overset{\circ}{C}$. \bar{C} est convexe.

Correction de l'exercice 19 ▲

1. Soit $a \in \bar{A}$ et $b \in \bar{B}$. Alors il existe une suite (a_n) de A et une suite (b_n) de B telle que a_n tend vers a et b_n tend vers b . Mais alors la suite $(a_n + b_n)$ est une suite de $A + B$ et elle converge vers $a + b$, donc $a + b \in \overline{A + B}$.

2. On commence par remarquer que A est fermé, que B est fermé, et donc que $\bar{A} = A$, $\bar{B} = B$. Maintenant, on a $A + B = \mathbb{R} \times]0, +\infty[$. L'inclusion \subset est claire, car $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ est stable par addition et puisque $A, B \subset \mathbb{R} \times]0, +\infty[$. Réciproquement, soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$. Posons $a = (1/y_0, y_0)$ et $b = (x_0 - 1/y_0, 0)$. Alors $a \in A$, $b \in B$ et $a + b = (x_0, y_0)$ ce qui prouve l'autre inclusion. On conclut alors facilement que

$$\overline{A + B} = \mathbb{R} \times [0, +\infty[\neq \bar{A} + \bar{B}.$$

Il est donc possible que l'inclusion de la première question soit stricte. Remarquons qu'on aurait aussi pu donner un exemple dans \mathbb{R} , par exemple avec $A = \mathbb{Z}$ et $B = \pi\mathbb{Z}$ dont la somme $A + B$ est dense dans \mathbb{R} .

Correction de l'exercice 20 ▲

On va considérer une partie de \mathbb{R} . Un singleton est d'intérieur vide, et un intervalle ouvert a pour adhérence l'intervalle fermé : on considère donc d'abord :

$$B = \{0\} \cup]1, 2[.$$

Si l'on veut ensuite que l'intérieur de l'adhérence de A soit différent de A , il est judicieux que 2 soit dans l'intérieur de l'adhérence de A , et pour cela on colle un intervalle ouvert de l'autre côté de A . On pose alors :

$$A = \{0\} \cup]1, 2[\cup]2, 3[.$$

On a :

$$\overset{\circ}{A} =]1, 2[\cup]2, 3[,$$

$$\bar{A} = \{0\} \cup [1, 3],$$

$$\text{Int}(\bar{A}) =]1, 3[,$$

$$Adh(\overset{\circ}{A}) = [1, 3],$$

ce qui prouve bien que tous ces ensembles sont différents.

Correction de l'exercice 21 ▲

1. Soit $x \in \text{Fr}(A)$, et $\varepsilon > 0$. Puisque $x \in \bar{A}$, $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. D'autre part, puisque $x \notin \overset{\circ}{A}$, $B(x, \varepsilon)$ n'est pas incluse dans A , ce qui se reformule en $B(x, \varepsilon) \cap C_E A \neq \emptyset$. L'inclusion réciproque se démontre en remontant simplement les étapes.

2. Si l'on remarque que le complémentaire du complémentaire de A est A lui-même, l'écriture précédente de $\text{Fr}(A)$ prouve que $\text{Fr}(A) = \text{Fr}(C_E A)$.

3. Si A est fermé, alors $\bar{A} \subset A$, et donc $\text{Fr}(A) \subset A$. Réciproquement, si $\text{Fr}(A) \subset A$, soit $x \in \bar{A}$. Si $x \notin \overset{\circ}{A}$, alors $x \in \text{Fr}(A) \subset A$. Si $x \in \overset{\circ}{A}$, alors évidemment $x \in A$. Dans tous les cas, on a prouvé que $x \in A$ et donc $\bar{A} \subset A$: A est fermé.

4. Si $x \notin \overset{\circ}{A}$, alors $x \in \text{Fr}(A) \subset A$.

5. Si $x \in \overset{\circ}{A}$, alors évidemment $x \in A$.

6. Si A est ouvert, alors $\overset{\circ}{A} = A$, et donc $\text{Fr}(A) \cap A = \emptyset$. Réciproquement, si $\text{Fr}(A) \cap A = \emptyset$, alors pour chaque $x \in A$, $x \notin \text{Fr}(A)$, et donc $x \in \overset{\circ}{A}$ (puisque évidemment $x \in \bar{A}$).

7. On a $\text{Fr}(\text{Fr} A) = \overline{\text{Fr}(A)} \cap C_E \text{Fr}(A)$. Puisque $\text{Fr}(A)$ est fermé, on a encore $\text{Fr}(\text{Fr} A) = \text{Fr}(A) \cap \overline{C_E \text{Fr}(A)}$. Il suffit donc de prouver que $\text{Fr}(A) \subset C_E \text{Fr}(A)$. Mais, on sait que $\text{Fr}(A) \subset \bar{A} = A$ et donc, en passant au complémentaire, $C_E A \subset C_E \text{Fr}(A)$. En passant à l'adhérence, on trouve

$$\text{Fr}(A) \subset \overline{C_E A} \subset \overline{C_E (\text{Fr}(A))}.$$

Correction de l'exercice 22 ▲

1. Soit $\ell \in V$. Il existe une suite extraite $(u_{\phi(n)})$ qui converge vers ℓ . Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$. Alors, pour $k \geq n$, on a $\phi(k) \geq k \geq n$, et donc

$$u_{\phi(k)} \in \{u_p : p \geq n\}.$$

Puisque $(u_{\phi(k)})$ converge vers ℓ , on en déduit que $\ell \in \overline{\{u_p : p \geq n\}}$. Puisque c'est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc $\ell \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{u_p : p \geq n\}}$.

Réciproquement, supposons que $\ell \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{\{u_p : p \geq n\}}$. On va construire par récurrence une suite $(\phi(k))$ d'entiers telle que, pour tout $k \geq 1$, $\|\ell - u_{\phi(k)}\| \leq 2^{-k}$ et $\phi(k) > \phi(k-1)$. On initialise la construction en disant que $\ell \in \overline{\{u_p : p \geq 0\}}$ et donc qu'il existe $\phi(0) \in \mathbb{N}$ tel que $\|\ell - u_{\phi(0)}\| \leq 1$. Supposons maintenant la construction réalisée jusqu'au rang $k-1$ et réalisons-la au rang k , avec $k \geq 1$. On utilise cette fois que $\ell \in \overline{\{u_p : p \geq \phi(k-1)+1\}}$ pour obtenir un entier $\phi(k) \geq \phi(k-1)+1 > \phi(k-1)$ tel que $\|\ell - u_{\phi(k)}\| \leq 2^{-k}$. Finalement, on a que $(u_{\phi(k)})$ converge vers ℓ , et donc que $\ell \in V$.

2. Maintenant, c'est facile : V est fermé comme intersection de fermés !

Correction de l'exercice 23 ▲

1. Soit M tel que $A \subset B(0, M)$. Soit $x \in \bar{A}$ et (x_n) une suite de A qui converge vers x . Alors, par passage à la limite :

$$\|x_n\| \leq M \implies \|x\| \leq M.$$

Donc \bar{A} est bornée, et comme $\text{Fr}(A) \subset \bar{A}$, $\text{Fr}(A)$ est bornée aussi.

2. On a les inclusions :

$$\overset{\circ}{A} \subset A \subset \bar{A},$$

qui donnent clairement :

$$\text{diam}(\overset{\circ}{A}) \leq \text{diam}(A) \leq \text{diam}(\bar{A}).$$

La première inégalité peut être stricte : en effet, si on prend $E = \mathbb{R}$, et $A = [0, 1] \cup \{2\}$, alors $\overset{\circ}{A} =]0, 1[$, et on a :

$$\text{diam}(\overset{\circ}{A}) = 1, \text{diam}(A) = 2.$$

En revanche, on a toujours $\text{diam}(A) = \text{diam}(\bar{A})$. En effet, pour $\varepsilon > 0$, par définition de la borne supérieure, il existe x et y dans \bar{A} tels que :

$$\|x - y\| \geq \text{diam}(\bar{A}) - \varepsilon.$$

Mais, par définition de l'adhérence, il existe des éléments x' et y' de A tels que :

$$\|x - x'\| \leq \varepsilon \text{ et } \|y - y'\| \leq \varepsilon.$$

On en déduit :

$$\|x' - y'\| \geq \|x - y\| - \|x' - x\| - \|y' - y\| \geq \text{diam}(\bar{A}) - 3\varepsilon.$$

On a donc prouvé que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\text{diam}(\bar{A}) \geq \text{diam}(A) \geq \text{diam}(\bar{A}) - 3\varepsilon.$$

Ceci prouve bien que $\text{diam}(A) = \text{diam}(\bar{A})$.

3. Il est clair que $\text{Fr}(A) \subset \bar{A} \implies \text{diam}(\text{Fr}(A)) \leq \text{diam} \bar{A} = \text{diam} A$, d'après le résultat de la question précédente. Soit M tel que $A \subset B(0, M)$. On a alors, pour $t \in X$:

$$\|x + tu\| \leq M \implies \|tu\| - \|x\| \leq M \implies t\|u\| \leq M + \|x\|,$$

et dont l'ensemble X est une partie de \mathbb{R} non vide et majorée par $\frac{M + \|x\|}{\|u\|}$. En particulier, sa borne supérieure existe. Une telle demi-droite est un ensemble de la forme $\{x + tu; t \geq 0\}$. Soit t la borne supérieure de l'ensemble X donné par la question précédente : on va prouver que $x + tu \in \text{Fr}(A)$. En effet, si $\varepsilon > 0$: Il existe t_1 dans X tel que $t - \varepsilon < t_1 < t$, et donc la boule de centre $x + t_1 u$ de rayon ε rencontre A en $x + t_1 u$. $x + (t + \varepsilon/2)u$ n'est pas dans A : c'est donc un point d'intersection du complémentaire de A et de la boule de centre $x + tu$ et de rayon ε .

Soit $\varepsilon > 0$ et x, y dans A tels que

$$\|x - y\| \geq \text{diam}(A) - \varepsilon.$$

On pose $u = y - x$, et X l'ensemble donné par la question (c). On note t_0 la borne sup de X . Il est clair que $t_0 \geq 1$ (puisque $1 \in X$), et d'après la question précédente, $z = x + t_0 u \in \text{Fr}(A)$. Il faut ensuite trouver un deuxième point à la frontière, qu'on trouve en traçant la deuxième demi-droite : pour $v = x - y$, on considère l'ensemble des points $x + tv$. Comme auparavant, on trouve un point à la frontière $z' = x + t_1 v$, avec cette fois $t_1 \geq 0$. Il reste à conclure que :

$$z' - z = (x + t_1 v) - (x + t_0 u) = (t_1 + t_0)(x - y).$$

Puisque $t_1 + t_0 \geq 1$, on trouve

$$\|z' - z\| \geq \|x - y\| \geq \text{diam}(A) - \varepsilon.$$

4. Il est clair que $\text{Fr}(A) \subset \bar{A} \implies \text{diam}(\text{Fr}(A)) \leq \text{diam} \bar{A} = \text{diam} A$, d'après le résultat de la question précédente.

5. Soit M tel que $A \subset B(0, M)$. On a alors, pour $t \in X$:

$$\|x + tu\| \leq M \implies \|tu\| - \|x\| \leq M \implies t\|u\| \leq M + \|x\|,$$

et dont l'ensemble X est une partie de \mathbb{R} non vide et majorée par $\frac{M + \|x\|}{\|u\|}$. En particulier, sa borne supérieure existe.

6. Une telle demi-droite est un ensemble de la forme $\{x + tu; t \geq 0\}$. Soit t la borne supérieure de l'ensemble X donné par la question précédente : on va prouver que $x + tu \in \text{Fr}(A)$. En effet, si $\varepsilon > 0$: Il existe t_1 dans X tel que $t - \varepsilon < t_1 < t$, et donc la boule de centre $x + t_1 u$ de rayon ε rencontre A en $x + t_1 u$. $x + (t + \varepsilon/2)u$ n'est pas dans A : c'est donc un point d'intersection du complémentaire de A et de la boule de centre $x + tu$ et de rayon ε .

7. Il existe t_1 dans X tel que $t - \varepsilon < t_1 < t$, et donc la boule de centre $x + t_1 u$ de rayon ε rencontre A en $x + t_1 u$.
8. $x + (t + \varepsilon/2)u$ n'est pas dans A : c'est donc un point d'intersection du complémentaire de A et de la boule de centre $x + t_1 u$ et de rayon ε .
9. Soit $\varepsilon > 0$ et x, y dans A tels que

$$\|x - y\| \geq \text{diam}(A) - \varepsilon.$$

On pose $u = y - x$, et X l'ensemble donné par la question (c). On note t_0 la borne sup de X . Il est clair que $t_0 \geq 1$ (puisque $1 \in X$), et d'après la question précédente, $z = x + t_0 u \in \text{Fr}(A)$. Il faut ensuite trouver un deuxième point à la frontière, qu'on trouve en traçant la deuxième demi-droite : pour $v = x - y$, on considère l'ensemble des points $x + t_1 v$. Comme auparavant, on trouve un point à la frontière $z' = x + t_1 v$, avec cette fois $t_1 \geq 0$. Il reste à conclure que :

$$z' - z = (x + t_1 v) - (x + t_0 u) = (t_1 + t_0)(x - y).$$

Puisque $t_1 + t_0 \geq 1$, on trouve

$$\|z' - z\| \geq \|x - y\| \geq \text{diam}(A) - \varepsilon.$$

Correction de l'exercice 24 ▲

Soit $a \in E$ et $\varepsilon > 0$. Il s'agit de prouver que $B(a, \varepsilon) \cap U \cap V$ est non-vide. Mais U est dense dans E , et donc il existe $u \in U \cap B(a, \varepsilon)$. Puisque $U \cap B(a, \varepsilon)$ est ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que $B(u, \delta) \subset U \cap B(a, \varepsilon)$. Maintenant, puisque V est dense, il existe $v \in V \cap B(u, \delta)$. Alors $v \in B(a, \varepsilon) \cap U \cap V$. Remarquons que l'hypothèse V ouvert est inutile. On aurait pu se contenter de supposer que U est un ouvert dense et que V est dense.

Correction de l'exercice 25 ▲

1. Le forme linéaire $\phi(f) = f(0)$ est continue pour cette norme puisque $|\phi(f)| \leq \|f\|_\infty$. On en déduit que F est fermé puisque $F = \phi^{-1}(\{0\})$ est l'image réciproque d'un fermé par une application continue.

2. Soit $g \in E$. On va construire une suite (f_n) de F telle que $\|f_n - g\|_1 \rightarrow 0$. Pour cela, soit $n \geq 1$ et soit f_n la fonction définie par $f_n(t) = g(t)$ pour $t \in [1/n, 1]$ et $f_n(t) = tg(1/n)/(1/n)$ si $t \in [0, 1/n]$ (c'est-à-dire que sur $[0, 1/n]$, f_n est la fonction linéaire qui vaut $g(1/n)$ en $1/n$). Alors $f_n \in F$ et

$$\|f_n - g\|_1 = \int_0^{1/n} |f_n(t) - g(t)| dt \leq \int_0^{1/n} |f_n(t)| dt + \int_0^{1/n} |g(t)| dt.$$

Mais si $t \in [0, 1/n]$, alors $|f_n(t)| \leq |g(1/n)| \leq \|g\|_\infty$. On en déduit que

$$\|f_n - g\|_1 \leq 2 \int_0^{1/n} \|g\|_\infty dt \leq \frac{2\|g\|_\infty}{n}.$$

Ceci prouve que F est dense dans $(E, \|\cdot\|_1)$.

Correction de l'exercice 26 ▲

1. Posons $A = \{n \in \mathbb{N}; u_n \leq a\}$. Alors A est une partie non-vide (car $n_0 \in A$) et majorée (car (u_n) tend vers $+\infty$) de \mathbb{N} . A admet donc un plus grand élément n . Mais alors, $u_n \leq a$, et $u_{n+1} > a$. De plus, $u_{n+1} \leq u_n + \varepsilon$ et donc $u_n \geq a - \varepsilon$. On en déduit que $|u_n - a| \leq \varepsilon$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n+1} - u_n \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $x + v_p \geq u_{n_0}$. Posons $a = x + v_p$. Alors il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - a| \leq \varepsilon$. Ceci signifie que $|(u_n - v_p) - x| \leq \varepsilon$, ce qui prouve la densité de $\{u_n - v_p; n, p \in \mathbb{N}\}$ dans \mathbb{R} .

3. Posons $u_n = \ln(n)$ et $v_p = 2p\pi$. Alors les hypothèses s'appliquent à (u_n) et (v_n) puisque

$$0 \leq u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{n}$$

d'après l'inégalité des accroissements finis. Ainsi, $\{\ln(n) - 2p\pi; n, p \geq 1\}$ est dense dans \mathbb{R} . Soit maintenant $x \in [-1, 1]$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos(\theta)$. Il existe $n, p \geq 1$ tels que, en posant $z = \ln(n) - 2p\pi$, on a $|z - \theta| \leq \varepsilon$. Par l'inégalité des accroissements finis, on a

$$|\cos z - \cos \theta| \leq |z - \theta| \leq \varepsilon,$$

ce qui implique, par 2π -périodicité de la fonction cosinus,

$$|\cos(\ln(n)) - x| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, $\{\cos(\ln n); n \geq 1\}$ est bien dense dans $[-1, 1]$.

Correction de l'exercice 27 ▲

1. Il suffit de prouver que $\{x \in H; x > 0\}$ est non-vide, puisque c'est une partie de \mathbb{R} minorée. Soit $x \in H$, $x \neq 0$. Si $x > 0$, c'est bon. Sinon, on considère $-x$.

2. Supposons que $m \notin H$. Alors, par définition de la borne inférieure, il existe $x \in H$ tel que $m < x < 2m$. Toujours par définition de la borne inférieure, il existe $y \in H$ tel que $m < y < x$. Mais alors, $x - y \in H$ puisque H est un groupe et $0 < x - y < m$, ce qui contredit la définition de la borne inférieure. On en déduit que $m \in H$ puis, parce que H est un groupe, que $m\mathbb{Z} \subset H$. Réciproquement, prenons $x \in H$. Si $x \notin m\mathbb{Z}$, soit k l'unique entier relatif tel que $mk < x < (k+1)m$. Alors $0 < x - mk < m$ et $x - mk \in H$, ce qui contredit à nouveau la définition de la borne inférieure. Donc $H = m\mathbb{Z}$.

3. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Il s'agit de prouver que $H \cap]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\neq \emptyset$. Comme H est symétrique par rapport à l'origine, on peut toujours supposer que $a \geq 0$. On sait qu'il existe $x \in H$ tel que $0 < x < \varepsilon$. Soit $n = \lfloor \frac{a}{x} \rfloor$. Alors on sait que $n \leq \frac{a}{x} < n+1$ soit $nx \leq a < (n+1)x < nx + \varepsilon$. On en tire que $a - \varepsilon < nx \leq a$ et puisque $nx \in H$, que $H \cap]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ est non vide. Ceci prouve bien que H est dense dans \mathbb{R} .

4. $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est ou bien dense dans \mathbb{R} ou bien de la forme $m\mathbb{Z}$. S'il est de la forme $m\mathbb{Z}$ alors $a \in m\mathbb{Z}$ et $b \in m\mathbb{Z}$, donc il existe $p, q \in \mathbb{Z}$ tels que $a = mp$ et $b = mq$. Il vient $\frac{a}{b} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Réciproquement, si $\frac{a}{b} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, alors on sait que

$$\begin{aligned} x \in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} &\iff \exists (k, l) \in \mathbb{Z}^2, x = ak + bl \\ &\iff \exists (k, l) \in \mathbb{Z}^2, x = b \left(\frac{a}{b}k + l \right) \\ &\iff \exists (k, l) \in \mathbb{Z}^2, x = b \left(\frac{p}{q}k + l \right) \\ &\iff \exists (k, l) \in \mathbb{Z}^2, x = \frac{b}{q} (pk + lq) \\ &\iff x \in \frac{b}{q} (p\mathbb{Z} + q\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Or, $p\mathbb{Z} + q\mathbb{Z}$ est un idéal de \mathbb{Z} et tous les idéaux de \mathbb{Z} sont de la forme $n\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Donc

$$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \frac{bn}{q}\mathbb{Z}.$$

Correction de l'exercice 28 ▲

Posons $f(x, y) = x^2 - \exp(\sin y) - 12$. Alors f est continue sur \mathbb{R}^2 , et $F = f^{-1}(]-\infty, 0])$. Comme $]-\infty, 0[$ est ouvert, F est ouvert comme image réciproque d'un ouvert par une application continue. De même, posons $g(x, y) = \ln(x^2 + 1)$. Alors g est continue et $G = g^{-1}(]-1, 1])$ est ouvert comme image réciproque de l'ouvert $]-1, 1[$ par g .

Correction de l'exercice 29 ▲

Soit $x \in E$ et considérons la suite (x_n) définie pour $n \geq 0$ par $x_n = x/2^n$. Alors on a $h(x_n) = h(x_n/2) = h(x_{n+1})$ pour tout entier n . En particulier, on en déduit que la suite $(h(x_n))$ est constante, égale à $h(x_0) = h(x)$. De plus,

(x_n) converge vers 0, et comme h admet pour limite ℓ en 0, $h(x_n)$ converge vers ℓ . Par unicité de la limite, on a $h(x) = \ell$ ce qui prouve bien que h est constante.

Correction de l'exercice 30 ▲

Soit $x, y \in E$. Alors

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \frac{1}{1 + \|x\|} - \frac{1}{1 + \|y\|} \right| \\ &= \left| \frac{\|x\| - \|y\|}{(1 + \|x\|)(1 + \|y\|)} \right| \end{aligned}$$

Mais on a d'une part $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$ d'après l'inégalité triangulaire et d'autre part $(1 + \|x\|)(1 + \|y\|) \geq 1$. On en déduit $|f(x) - f(y)| \leq \|x - y\|$ qui est bien l'inégalité demandée.

Correction de l'exercice 31 ▲

On commence par vérifier que $g(E) \subset B(0, 1)$. En effet, si $x \in B(0, 1)$, on a

$$\|g(x)\| = \frac{\|x\|}{1 + \|x\|} < 1.$$

Soit $y \in B(0, 1)$. On cherche à résoudre l'équation $y = g(x)$ avec $x \in B(0, 1)$. Si une solution existe, on a $y = \frac{x}{1 + \|x\|}$ et donc

$$\|y\| = \frac{\|x\|}{1 + \|x\|}.$$

On obtient alors facilement que

$$\|x\| = \frac{\|y\|}{1 - \|y\|}$$

et de

$$y = \frac{x}{1 + \|x\|} = \frac{x}{1 + \frac{\|y\|}{1 - \|y\|}} = (1 - \|y\|)x$$

on tire

$$x = \frac{y}{1 - \|y\|}$$

Réciproquement, on vérifie très facilement que

$$g\left(\frac{y}{1 - \|y\|}\right) = y.$$

On a donc prouvé que g est une bijection de E sur $B(0, 1)$ et que $g^{-1}(y) = \frac{y}{1 - \|y\|}$ (le dénominateur ne s'annule pas). On conclut que g et g^{-1} sont continues comme quotient de deux fonctions continues.

Correction de l'exercice 32 ▲

On va prouver que φ est 1-lipschitzienne. Pour cela, on considère $f, g \in E$ et soit $t \in [0, 1]$. Alors on a

$$\varphi(g) \leq g(t) = g(t) - f(t) + f(t) \leq \|g - f\|_\infty + f(t).$$

On a donc, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$f(t) \geq \varphi(g) - \|g - f\|_\infty.$$

Prenant la borne inférieure, on trouve

$$\varphi(f) \geq \varphi(g) - \|g - f\|_\infty$$

c'est-à-dire $\varphi(g) - \varphi(f) \leq \|g - f\|_\infty$. Par symétrie du rôle joué par f et g , on a aussi $\varphi(f) - \varphi(g) \leq \|f - g\|_\infty$ et donc $|\varphi(g) - \varphi(f)| \leq \|g - f\|_\infty$. L'application φ est 1-lipschitzienne, donc continue.

Correction de l'exercice 33 ▲

1. Supposons d'abord que $A \cap B = \emptyset$ et considérons $x \in E$. Alors ou bien $x \notin A$, ou bien $x \notin B$. Si $x \notin A$, comme A est fermé, on a $d(x, A) > 0$ et si $x \notin B$, alors $d(x, B) > 0$. Dans tous les cas, on a $d(x, A) + d(x, B) > 0$. Réciproquement, si $A \cap B \neq \emptyset$, alors considérons $x \in A \cap B$. On a $d(x, A) = d(x, B) = d(x, A) + d(x, B) = 0$.

2. Posons $f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}$. Alors f est une fonction continue comme quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Il est de plus clair que $f(x) = 1$ si $x \in B$ et que $f(x) = 0$ si $x \in A$.

3. Posons $I =]-\infty, 1/3[$ et $J =]2/3, +\infty[$, puis $U = f^{-1}(I)$ et $V = f^{-1}(J)$. Alors $I \cap J = \emptyset$ et donc $U \cap V = \emptyset$. U et V sont ouverts comme images réciproques d'ouverts par une application continue, et clairement $A \subset U$, $B \subset V$.

Correction de l'exercice 34 ▲

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ et posons $x_n = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n}$. Alors on a, par définition de la partie entière,

$$2^n x_n \leq 2^n x \leq 2^n x_n + 1 \iff x - \frac{1}{2^n} \leq x_n \leq x.$$

Par le théorème des gendarmes, (x_n) converge vers x et donc \mathcal{D} est dense dans \mathbb{R} .

2. Commençons par prouver par récurrence double sur $p \in \mathbb{N}$ que $f(p) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. En effet, on a bien $f(0) = f(1) = 0$. De plus, si $f(p-2) = f(p-1) = 0$, alors en appliquant la propriété avec $x = p-2$ et $y = p$, on a

$$f(p-1) = \frac{1}{2}f(p) + \frac{1}{2}f(p-2),$$

ce qui implique $f(p) = 0$. De plus, f est impaire. En effet, si $x \in \mathbb{R}$ et si on applique la propriété avec $y = -x$, alors $f(x) + f(-x) = 0$ ce qui prouve bien que f est impaire. Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on a $f(p) = 0$. Prouvons maintenant par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $f(p/2^n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est vrai pour $n = 0$, et si c'est vrai au rang n , alors appliquons la propriété avec $x = 0$ et $y = p/2^n$. Alors $f(\frac{p}{2^{n+1}}) = 0$ ce qui prouve que la propriété est vraie au rang $n+1$. Ainsi, on a prouvé que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathcal{D}$. Puisque \mathcal{D} est dense et que f est continue, on en déduit que $f = 0$.

3. Soit g la fonction affine telle que $f(0) = g(0)$ et $f(1) = g(1)$ et posons $h = f - g$. Alors h vérifie la propriété et vérifie également que $h(0) = h(1) = 0$. On en déduit que h est identiquement nulle, puis que $f = g$ est affine.

Correction de l'exercice 35 ▲

1. Soit $f \in \mathcal{L}$. Il existe donc $K \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tous $x, y \in A$, $\|f(x) - f(y)\| \leq K\|x - y\|$. Fixons $a \in A$. Alors, pour tout $x \in A$, on a par l'inégalité triangulaire

$$\|f(x)\| \leq \|f(a)\| + \|f(x) - f(a)\| \leq \|f(a)\| + K\|x - a\| \leq \|f(a)\| + K \operatorname{diam}(A).$$

Ainsi, f est bornée.

2. K_f est une partie non vide (car f est lipschitzienne) et minorée. Elle admet donc une borne inférieure.

3. Soit (k_n) une suite de K_f qui converge vers C_f . Alors, pour tous $x, y \in A$, on a

$$\|f(x) - f(y)\| \leq k_n \|x - y\|.$$

On fait tendre n vers l'infini et on a

$$\|f(x) - f(y)\| \leq C_f \|x - y\|$$

ce qui entraîne bien que $C_f \in K_f$.

4. Fixons $x, y \in A$. Alors on a par l'inégalité triangulaire

$$\|(f+g)(x) - (f+g)(y)\| \leq \|f(x) - f(y)\| + \|g(x) - g(y)\|.$$

Puisque $C_f \in K_f$ et que $C_g \in K_g$, on a encore

$$\|(f+g)(x) - (f+g)(y)\| \leq C_f \|x - y\| + C_g \|x - y\| \leq (C_f + C_g) \|x - y\|.$$

Autrement dit, $C_f + C_g \in K_{f+g}$ et donc $C_{f+g} \leq C_f + C_g$. Pour la deuxième égalité, il suffit de remarquer que

$$K_{\lambda f} = |\lambda| K_f,$$

qui est une conséquence du fait que $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

5. N_a est bien à valeurs dans \mathbb{R}_+ . Si $f = 0$, on a $N_a(f) = 0$ et réciproquement, si $N_a(f) = 0$, alors $f(a) = 0$ et pour tout $x \in A$, on a $\|f(x) - f(a)\| \leq 0\|x - a\|$, soit $f(x) = f(a) = 0$. La fonction est bien identiquement nulle. De plus, si $f, g \in \mathcal{L}$, alors on a

$$N_a(f+g) = |f(a) + g(a)| + C_{f+g} \leq |f(a)| + |g(a)| + C_f + C_g = N_a(f) + N_a(g).$$

Comme de plus, $C_{\lambda f} = |\lambda| C_f$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ (pourquoi?), on a également que $N_a(\lambda f) = |\lambda| N_a(f)$.

6. Par symétrie du rôle joué par a et b , il suffit de trouver une constante $M > 0$ telle que $N_b(f) \leq M N_a(f)$ pour tout $f \in \mathcal{L}$ et même, en faisant attention à la forme de N_a et de N_b , il suffit de prouver que $|f(b)| \leq M(|f(a)| + C_f)$. Mais,

$$\begin{aligned} \|f(b)\| &\leq \|f(a)\| + \|f(b) - f(a)\| \\ &\leq \|f(a)\| + C_f \|b - a\| \\ &\leq \|f(a)\| + \text{diam}(A) C_f \\ &\leq M N_a(f) \end{aligned}$$

où $M = \max(\text{diam}(A), 1)$. Ainsi, les deux normes sont équivalentes.

Correction de l'exercice 36 ▲

On va munir \mathbb{R}^2 de la norme $\|\cdot\|_\infty$, $\|(x, y)\|_\infty = \max(|x|, |y|)$. Imaginons que la fonction f soit uniformément continue. Alors, en appliquant la définition pour $\varepsilon = 1$, il existerait $\alpha > 0$ tel que

$$\forall (a, b, x, y) \in \mathbb{R}^4, |x - a| < \alpha \text{ et } |y - b| < \alpha \implies |f(x, y) - f(a, b)| < 1.$$

On va choisir judicieusement a, b, x, y de sorte que cette dernière inégalité soit fautive. Pour cela, on commence par choisir x et y de sorte que $x = a + \alpha/2$ et $y = b$. On a alors :

$$f(x, y) - f(a, b) = b\alpha/2.$$

On choisit $a = 0, b = 2/\alpha$. On a

$$f(x, y) - f(a, b) = 1,$$

une contradiction puisque $|x - a| < \alpha$ et $|y - b| < \alpha$.

Correction de l'exercice 37 ▲

1. On a :

$$0 \leq (|x| - |y|)^2 = x^2 + y^2 - 2|xy|.$$

2. L'inégalité de la question précédente se réécrit encore en

$$|xy| \leq \frac{\|(x, y)\|_2^2}{2}.$$

On en déduit, d'après l'inégalité triangulaire

$$|f(x, y)| \leq \frac{3\|(x, y)\|_2^2 + \frac{\|(x, y)\|_2^2}{2}}{\|(x, y)\|_2} \leq 4\|(x, y)\|_2.$$

Ainsi, si (x, y) tend vers 0, on a $|f(x, y)|$ qui tend vers 0.

Correction de l'exercice 38 ▲

1. Il suffit d'étudier la limite des deux fonctions coordonnées (f_1, f_2) . Or, $x^2 + y^2 - 1$ tend vers -1 , et $\frac{\sin x}{x}$ vers 1 si (x, y) tend vers $(0, 0)$. f_1 tend donc vers -1 si (x, y) tend vers $(0, 0)$. D'autre part, on a

$$|f_2(x, y)| \leq \frac{|\sin(x^2)|}{x^2} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{|\sin(y^2)|}{y^2} \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Mais on a $\sin(x^2)/x^2 \rightarrow 1$ quand $(x, y) \rightarrow (0, 0)$, et

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \sqrt{x^2 + y^2}.$$

On en déduit que $f_2(x, y)$ tend vers 0 si (x, y) tend vers $(0, 0)$, et donc $f(x, y)$ tend vers $(-1, 0)$ si (x, y) tend vers $(0, 0)$.

2. Par un classique développement limité, on sait que $\frac{1 - \cos(t)}{t^2} \rightarrow \frac{1}{2}$ si $t \rightarrow 0$. Maintenant, on peut écrire

$$f(x, y) = x \frac{1 - \cos(xy)}{(xy)^2}.$$

De la remarque précédente, on tire que $\frac{1 - \cos(xy)}{(xy)^2}$ tend vers $1/2$ si (x, y) tend vers $(0, 0)$. On en déduit que $f(x, y)$ tend vers 0 si (x, y) tend vers $(0, 0)$.

3. Pour $t > 0$, on remarque que

$$f(t, t^{2/3}) = \frac{t \cdot t^{\frac{8}{3}}}{2t^4} = \frac{1}{2t^{\frac{1}{3}}} \xrightarrow{t \rightarrow 0} +\infty.$$

Ainsi, f n'admet pas de limite en $(0, 0)$.

4. On va majorer $|f(x, y)|$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Pour cela, on remarque que

$$|x| \leq (x^8 + y^6)^{1/8} \text{ et } |y| \leq (x^8 + y^6)^{1/6}.$$

On en déduit

$$|f(x, y)| \leq \frac{(x^8 + y^6)^{\frac{3}{8} + \frac{4}{6}}}{x^8 + y^6} \leq (x^8 + y^6)^{\frac{1}{24}}.$$

Puisque $(x^8 + y^6)^{\frac{1}{24}}$ tend vers 0 si (x, y) tend vers $(0, 0)$, on en déduit que f admet une limite en $(0, 0)$ égale à 0 .

Correction de l'exercice 39 ▲

On va partir des inégalités $|x| \leq (x^2 + y^2)^{1/2}$ et $|y| \leq (x^2 + y^2)^{1/2}$. Ainsi, on a

$$|f(x, y)| \leq (x^2 + y^2)^{\frac{\alpha + \beta}{2} - 1}.$$

Ainsi, si $\alpha + \beta > 2$, $f(x, y)$ tend vers 0 si (x, y) tend vers $(0, 0)$. Dans le cas contraire, alors on remarque que d'une part $f(1/n, 0) = 0$ et donc si f admet une limite en $(0, 0)$, celle-ci ne peut être que nulle. Maintenant, on a

$$f(1/n, 1/n) = \frac{1}{2} n^{2 - \alpha - \beta}.$$

Ceci ne tend pas vers 0 si $\alpha + \beta \leq 2$, et la fonction f n'admet pas de limite en $(0, 0)$.

Correction de l'exercice 40 ▲

On pose $x = y = t$, et on fait tendre t vers 0 . On a alors

$$f(t, t) = \frac{1}{2}.$$

En faisant tendre t vers 0 , on voit que ceci tend vers $1/2$, qui n'est pas 0 . La fonction f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Correction de l'exercice 41 ▲

Posons $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\}$ et $\mathcal{U} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 > 1\}$. \mathcal{D} et \mathcal{U} sont deux ouverts de \mathbb{R}^2 sur lesquels f a une expression polynomiale. f est donc continue sur \mathcal{D} et sur \mathcal{U} . Il reste donc à vérifier la continuité de f en un point (a, b) tel que $a^2 + b^2 = 1$. Soit (a, b) un tel point et soit (x_n, y_n) une suite qui converge vers (a, b) . Soit $n \geq 1$. Si (x_n, y_n) est élément de \mathcal{U} , alors $f(x_n, y_n) = 2x_n^2 + y_n^2 - 1$ tandis que si ce n'est pas le cas, $f(x_n, y_n) = x_n^2$. Mais,

$$2x_n^2 + y_n^2 - 1 \rightarrow 2a^2 + b^2 - 1 = a^2 \text{ tandis que } x_n^2 \rightarrow a^2.$$

On a bien $f(x_n, y_n) \rightarrow a^2 = f(a, b)$, et la fonction f est continue en (a, b) .

Correction de l'exercice 42 ▲

Remarquons déjà que le domaine de définition de f est $D = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$. Posons de plus $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(u) = \frac{\sin u}{u}$ si $u \neq 0$ et $h(0) = 1$, et posons également $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xy$. Il est bien connu que la fonction h est continue sur \mathbb{R} (c'est le prolongement par continuité sur \mathbb{R} de la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$). g est bien sûr continue, et donc $h \circ g$ est une fonction continue sur \mathbb{R}^2 . Mais, si $(x, y) \in D$, alors $f(x, y) = h \circ g(x, y)$. Ainsi, $h \circ g$ est un (le !) prolongement continu de f à \mathbb{R}^2 .

Correction de l'exercice 43 ▲

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Si $a \neq b$, on a encore $x \neq y$ pour tout (x, y) proche de (a, b) et on a bien

$$F(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \xrightarrow{(x, y) \rightarrow (a, b)} \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = F(a, b).$$

Si maintenant $a = b$, alors on remarque que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ou bien en appliquant la définition si $x = y$, ou bien en appliquant le théorème des accroissements finis, il existe $c_{x,y}$ compris entre x et y tel que

$$F(x, y) = f'(c_{x,y}).$$

Mais si $(x, y) \rightarrow (a, a)$, alors $c_{x,y} \rightarrow a$ et la continuité de f' entraîne que

$$F(x, y) \rightarrow f'(a) = F(a, a).$$

Ainsi, F est aussi continue en (a, a) .

Correction de l'exercice 44 ▲

1. Soient $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$ appartenant à $f(C)$. On peut supposer $y_1 \leq y_2$ et soit y dans l'intervalle $[y_1, y_2]$. On considère la fonction $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto f((1-t)x_1 + tx_2)$. g est bien définie car C est convexe, g est continue, $g(0) = f(x_1) = y_1$, $g(1) = f(x_2) = y_2$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction d'une variable réelle g , il existe $t \in [0, 1]$ avec $g(t) = y$. Posons $x = (1-t)x_1 + tx_2 \in C$. Alors $f(x) = y$. Ceci prouve bien que $f(C)$ est un intervalle.

2. Posons $C = \{(x, y) \in I; x > y\}$ et $f : C \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = h(x) - h(y)$. Alors C est convexe (il suffit de faire un dessin pour s'en convaincre, mais on peut vérifier très facilement la définition). $f(C)$ est un intervalle d'après la question précédente, et cet intervalle ne peut pas contenir 0 puisque h est injective. Ainsi, on a ou bien $f > 0$ ou bien $f < 0$. Le premier cas dit que, si $x > y$, alors $h(x) > h(y)$ et donc que h est strictement croissante. Le second cas dit que h est strictement décroissante.

Correction de l'exercice 45 ▲

1. Puisque g est continue sur le segment $[0, 1]$, elle y est bornée (et atteint ses bornes). Posons $M = \max_{t \in [0, 1]} |g(t)|$. Alors on a

$$\|Tf\|_1 = \int_0^1 |f(t)g(t)| dt \leq M \int_0^1 |f(t)| dt \leq M \|f\|_1.$$

Ceci prouve que T est continue.

2. Supposons que T est continue. Alors il existe $C > 0$ tel que, pour tout $P \in E$, on a $\|TP\| \leq C\|P\|$. Soit $n \geq 0$. Pour $P = X^n$, on trouve

$$TP = nX^{n-1}, \text{ d'où } n = \|TP\| \leq C\|P\| = C.$$

Ceci est impossible car \mathbb{N} n'est pas majoré. Donc T n'est pas continue.

3. On peut utiliser deux arguments différents. On peut d'une part remarquer que E est un espace vectoriel de dimension finie, que toute application linéaire entre espaces de dimension finie est continue. On peut aussi utiliser un calcul direct. En effet, soit $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in E$. Alors on a

$$\begin{aligned} \|TP\| &= \left\| \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1} \right\| \\ &= \sum_{k=1}^n k |a_k| \\ &\leq n \sum_{k=1}^n |a_k| \leq n\|P\|. \end{aligned}$$

Puisque n ne dépend pas de P (ceci ne dépend que de E), on obtient que T est continue.

4. On va prouver que T est continue par un calcul direct. Prenons en effet $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in E$ (la somme est en fait finie). Alors on a :

$$\begin{aligned} \|TP\| &= \left\| \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) a_{k+1} X^k \right\| \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) k! |a_{k+1}| = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)! |a_{k+1}| \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} k! |a_k| \\ &\leq \|P\|. \end{aligned}$$

Ceci prouve la continuité de T .

5. On prouve que T est continue en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\|Tf\| = \int_0^1 |f(t)| |g(t)| dt \leq \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^1 |g(t)|^2 dt \right)^{1/2} = C \|f\|_2,$$

avec

$$C = \left(\int_0^1 |g(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

C est bien un réel fini, car g est continue sur $[0, 1]$, donc bornée, et on a $C \leq \|g\|_\infty$.

Correction de l'exercice 46 ▲

1. On a

$$N_1(T(P)) = \sum_{n=0}^{+\infty} |(P')^{(n)}(0)| = \sum_{k=1}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| \leq N_1(P).$$

Ainsi, par la caractérisation de la continuité des applications linéaires, T est continu de $(\mathbb{R}[X], N_1)$ dans $(\mathbb{R}[X], N_1)$.

2. Pour $k \geq 1$, considérons $P_k = X^k$. Alors $N_2(P_k) = 1$. D'autre part, $T(P_k) = kX^{k-1}$ et donc $N_2(T(P_k)) = k$. Il est donc impossible qu'il existe une constante C telle que $N_2(T(P_k)) \leq CN_2(P_k)$ pour tout $k \geq 1$. L'application linéaire T n'est pas continue de $(\mathbb{R}[X], N_2)$ dans $(\mathbb{R}[X], N_2)$.

Correction de l'exercice 47 ▲

1. Supposons ϕ continue. Alors il existe $C \geq 1$ tel que

$$\|\phi(P)\| \leq C\|P\|$$

pour tout polynôme P . Prenons le polynôme $P(X) = X^n$. Alors $\|P\| = 1$. Mais $P(X+1) = (X+1)^n = X^n + nX^{n-1} + \dots$. Ainsi, on obtient

$$n \leq \|P(X+1)\| \leq C,$$

ce qui est impossible si on choisit n assez grand. Ainsi, ϕ n'est pas continue.

2. Écrivons $A(X) = \sum_{j=0}^p b_j X^j$ et $P(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i$. Alors $AP(X) = \sum_{k=0}^{n+p} c_k X^k$ avec

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j.$$

Notons $M = \max_{j=0,\dots,p} |b_j|$. On a donc

$$|c_k| \leq M \sum_{i=\max(0,k-p)}^k |a_i|,$$

ce qui entraîne

$$\|AP\|_1 \leq M \sum_{k=0}^{n+p} \sum_{i=\max(0,k-p)}^k |a_i|.$$

Fixons i_0 dans $\{0, \dots, n\}$. S'il apparaît dans la somme $\sum_{i=\max(k-p,0)}^k |a_i|$, c'est que $k-p \leq i_0 \leq k$. En particulier, il apparaît au plus $k - (k-p) + 1 = (p+1)$ fois. On en déduit que

$$\|AP\|_1 \leq M(p+1)\|P\|_1,$$

ce qui prouve que ψ est continue.

Correction de l'exercice 48 ▲

Pour $a \in \mathbb{R}$, la fonction $f_a(x) = e^{ax}$ est dans E , et elle vérifie $Df_a = af_a$. Or, si D était continue pour la norme N , il existerait une constante $C > 0$ telle que

$$N(D(f_a)) \leq CN(f_a)$$

pour tout $a \in \mathbb{R}$. On obtiendrait alors que, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$|a|N(f_a) \leq CN(f_a) \implies |a| \leq C.$$

C'est bien sûr impossible, et D n'est pas continue sur (E, N) .

Correction de l'exercice 49 ▲

1. Soit $u \in \mathcal{L}_c(E)$. D'abord, si $u = 0$, on a bien $\|u\| = 0$. Réciproquement, si $\|u\| = 0$, alors $\|u(x)\| = 0$ pour tout $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$. Considérons alors $y \in E$. Si $y = 0$, on a bien $u(y) = 0$. Si $y \neq 0$, considérons $x = y/\|y\|$. Alors $\|x\| = 1$, donc $u(x) = 0$, donc par homogénéité de u , $u(y) = 0$ et u est bien nulle. Considérons maintenant $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\{\|\lambda u(x)\|; \|x\| = 1\} = |\lambda| \times \{\|u(x)\|; \|x\| = 1\}.$$

On en déduit que $\|\lambda u\| = |\lambda| \times \|u\|$. Finalement, soient $u, v \in \mathcal{L}_c(E)$. Alors, pour tout $x \in E$ avec $\|x\| = 1$, on a

$$\|u(x) + v(x)\| \leq \|u(x)\| + \|v(x)\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Passant au sup sur x , on obtient bien que $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$. Ainsi, la formule

$$\|u\| = \sup\{\|u(x)\|; \|x\| \leq 1\}$$

définit bien une norme sur $\mathcal{L}_c(E)$.

2. Soit $x \in E$. Si $x = 0$, la formule est claire sinon posons $y = x/\|x\|$. Alors on a $\|u(y)\| \leq \|u\|$ ce qui implique facilement par homogénéité que $\|u(x)\| \leq \|u\| \times \|x\|$. Soit maintenant $u, v \in \mathcal{L}_c(E)$. Alors, pour tout $x \in E$ avec $\|x\| = 1$, on a

$$\|u(v(x))\| \leq \|u\| \times \|v(x)\| \leq \|u\| \times \|v\|.$$

Passant au sup en x , on en déduit bien que $\|u \circ v\| \leq \|u\| \times \|v\|$.

Correction de l'exercice 50 ▲

1. On a, par télescope,

$$\sum_{k=0}^n u^k(u - Id) = u^{n+1} - Id$$

et donc $v_n \circ (u - Id) = \frac{1}{n+1}(u^{n+1} - Id)$.

2. Soit $y \in \ker(u - Id) \cap \text{Im}(u - Id)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = (u - Id)(x)$. On en déduit que $v_n(y) = \frac{1}{n+1}(u^{n+1}(x) - x)$. Puisque $\|u^{n+1}(x)\| \leq \|x\|$, on obtient que $(v_n(y))$ tend vers 0. Mais d'autre part, on sait aussi que $u(y) = y$, et donc, pour tout entier n , on a $v_n(y) = y$. Par unicité de la limite, $y = 0$.

3. C'est une conséquence immédiate du théorème du rang et du résultat de la question précédente.

4. Soit $x \in E$, écrivons $x = y + z$ avec $y \in \ker(u - Id)$ et $z \in \text{Im}(u - Id)$. Alors le calcul effectué à la deuxième question montre que $v_n(y) = y$ et que $v_n(z)$ tend vers 0. Ainsi, $(v_n(x))$ tend vers y qui est bien égal à $p(x)$.

Correction de l'exercice 51 ▲

On remarque d'abord que T est clairement linéaire. De plus, si $P = \sum_{k \geq 0} a_k X^k$, alors $T(P) = \sum_{k \geq 0} a_k X^{k+1} = \sum_{k \geq 1} a_{k-1} X^k$. On a donc $\|T(P)\|_\infty = \|P\|_\infty$. Ceci prouve que T est continue et que $\|T\|_{\text{op}} = 1$.

Correction de l'exercice 52 ▲

On remarque que l'application trace est linéaire. De plus, soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$. Alors

$$\begin{aligned} |\text{Tr}(A)| &\leq \sum_{i=1}^n |a_{i,i}| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \\ &\leq \sum_{i=1}^n N(A) \leq nN(A). \end{aligned}$$

Ceci prouve que l'application trace est continue et que $\|\text{Tr}\| \leq n$. De plus, on a

$$\text{Tr}(I_n) = n \text{ et } N(I_n) = 1.$$

Ainsi, on a exactement $\|\text{Tr}\| = n$.

Correction de l'exercice 53 ▲

On remarque d'abord que Tf , étant une primitive d'une fonction continue, est bien de classe \mathcal{C}^1 donc élément de F . De plus, pour tout $x \in [0, 1]$, on a

$$|Tf(x)| \leq \int_0^x |f(t)| dt \leq x\|f\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

De plus, $(Tf)' = f$ et donc $\|(Tf)'\|_\infty = \|f\|_\infty$. On en déduit que $\|Tf\|_F \leq 2\|f\|_\infty$, ce qui prouve que T est continue et que $\|T\| \leq 2$. Nous allons maintenant démontrer que $\|T\| = 2$. Puisque $\|(Tf)'\|_\infty = \|f\|_\infty$, il n'y a (jamais) aucune perte dans cette majoration, et on est amené à chercher une fonction $f \in E$ telle que $\left| \int_0^1 f(t) dt \right| = \|f\|_\infty$. Prenons $f = 1$. Alors $\|f\|_\infty = 1$, $Tf(x) = x$ et donc $\|Tf\|_\infty = 1$. Il vient $\|Tf\|_F = 2\|f\|_\infty$, et donc on a effectivement $\|T\| = 2$.

Correction de l'exercice 54 ▲

1. On peut réécrire autrement $L(f)(t)$:

$$L(f)(t) = \left(\int_0^1 f(u) du \right) t + \int_0^1 u f(u) du.$$

Ainsi, la fonction $L(f)$ est affine et est bien un élément de E . La linéarité de $f \mapsto L(f)$ ne pose pas de problèmes, en utilisant la linéarité de l'intégrale.

2. Soit $f \in E$ et $t \in [0, 1]$. Alors, par l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} |Lf(t)| &\leq \int_0^1 |f(u)| du \times |t| + \int_0^1 |u| \cdot |f(u)| du \\ &\leq \int_0^1 \|f\|_\infty du + \int_0^1 |u| \cdot \|f\|_\infty du \\ &\leq \|f\|_\infty + \frac{1}{2} \|f\|_\infty \\ &\leq \frac{3}{2} \|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Ceci prouve que $\|Lf\|_\infty \leq \frac{3}{2} \|f\|_\infty$ et donc que L est continue avec $\|L\|_{\text{op}} \leq \frac{3}{2}$. De plus, considérons $f = 1$. Alors $\|f\|_\infty = 1$ et $Lf(t) = t + \frac{1}{2}$. En particulier, $\|Lf\|_\infty = \frac{3}{2}$. Ceci prouve que $\|L\|_{\text{op}} = \frac{3}{2}$.

Correction de l'exercice 55 ▲

Soit $a, b > 0$ tels que, pour tout $x \in E$, on a

$$a\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq b\|x\|_2.$$

Fixons $T \in \mathcal{L}_c(E)$. Alors, pour tout $x \in E$, on a

$$\begin{aligned} \|Tx\|_1 &\leq b\|Tx\|_2 \\ &\leq b\|T\|_{\text{op},2} \cdot \|x\|_2 \\ &\leq \frac{b}{a}\|T\|_{\text{op},2} \cdot \|x\|_1. \end{aligned}$$

Ceci prouve que

$$\|T\|_{\text{op},1} \leq \frac{b}{a}\|T\|_{\text{op},2}.$$

Par symétrie du rôle joué par les deux normes, une inégalité du type

$$\|T\|_{\text{op},2} \leq c\|T\|_{\text{op},1}$$

est aussi vérifiée (si on reprend les calculs, on trouve que $\frac{a}{b}$ convient). Donc les deux normes $\|\cdot\|_{\text{op},1}$ et $\|\cdot\|_{\text{op},2}$ sont bien équivalentes.

Correction de l'exercice 56 ▲

La différence de deux suites bornées étant bornée, il est facile de vérifier que T est bien un endomorphisme de E . De plus, soit $u \in E$ et $v = T(u)$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|v_n| = |u_{n+1} - u_n| \leq |u_{n+1}| + |u_n| \leq 2\|u\|_\infty$$

et donc $\|T(u)\|_\infty \leq 2\|u\|_\infty$. Ceci prouve que T est continue et que $\|T\| \leq 2$. De plus, considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 = -1$, $u_1 = 1$ et $u_n = 0$ si $n \geq 2$. Alors, si $v = T(u)$, on a $v_0 = 2$, $v_1 = -1$ et $v_n = 0$ pour $n \geq 2$. On a donc

$$\|T(u)\|_\infty = 2 = 2 \cdot \|u\|_\infty.$$

Ainsi, $\|T\|_{\text{op}} = 2$.

Correction de l'exercice 57 ▲

D'une part, il est facile de voir que T est linéaire. Ensuite, prenons $u \in E$ et posons $v = T(u)$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|v_n| = \frac{1}{n+1} \left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n |u_k| \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \|u\|_{\infty} = \|u\|_{\infty}.$$

Ceci prouve d'une part que $T(u) \in E$ et donc que T est un endomorphisme de E et d'autre part que T est continue avec $\|T\|_{\text{op}} \leq 1$. De plus, si on choisit u la suite constante égale à 1, alors $T(u) = u$ et donc

$$\|T(u)\|_{\infty} = 1 \cdot \|u\|_{\infty}.$$

Ceci prouve que $\|T\|_{\text{op}} \geq 1$ et finalement que $\|T\|_{\text{op}} = 1$.

Correction de l'exercice 58 ▲

On note $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$.

1. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Alors $AX = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1,j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{n,j}x_j \end{pmatrix}$ de sorte que

$$\begin{aligned} \|AX\|_1 &= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j}x_j \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \cdot |x_j| \right) \\ &\leq \sum_{j=1}^n |x_j| \cdot \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \\ &\leq \sum_{j=1}^n |x_j| \cdot \|C_j\|_1 \\ &\leq \max_{j=1,\dots,n} \|C_j\|_1 \cdot \sum_{j=1}^n |x_j| \\ &\leq \max_{j=1,\dots,n} \|C_j\|_1 \|X\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Ainsi, on vient de prouver que $\|A\| \leq \max_{j=1,\dots,n} \|C_j\|_1$. Pour prouver qu'il y a égalité, on considère $j_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que

$$\|C_{j_0}\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \|C_j\|_1.$$

Soit X_0 le vecteur colonne de \mathbb{R}^n dont toutes les composantes sont nulles sauf la j_0 -ème qui est égale à 1. Alors $AX_0 = C_{j_0}$ de sorte que

$$\|AX_0\|_1 = \|C_{j_0}\|_1 = \|C_{j_0}\|_1 \cdot \|X_0\|_1.$$

Ainsi, on a prouvé que $\|A\| = \max_{j=1,\dots,n} \|C_j\|_1$.

2. On reprend de la même façon, en considérant $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Cette fois, on doit majorer $\sup_{i=1,\dots,n} |(AX)_i|$.

Mais, pour $i = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned}
 |(AX)_i| &= \left| \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_j \right| \\
 &\leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \cdot |x_j| \\
 &\leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \cdot \max_{j=1, \dots, n} |x_j| \\
 &\leq \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \cdot \|X\|_\infty \\
 &\leq \|L_i\|_1 \cdot \|X\|_\infty \\
 &\leq \max_{i=1, \dots, n} \|L_i\|_1 \cdot \|X\|_\infty.
 \end{aligned}$$

Ainsi, $\|AX\|_\infty \leq \max_{i=1, \dots, n} \|L_i\|_1 \cdot \|X\|_\infty$ et donc $\|A\| \leq \max_{i=1, \dots, n} \|L_i\|_1$. Réciproquement, soit $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\|L_{i_0}\|_1 = \max_{i=1, \dots, n} \|L_i\|_1$ et choisissons $X_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $X_0 = (\varepsilon_j)_{j=1, \dots, n}$ où $\varepsilon_{i,j} \in \{-1, +1\}$ est tel que $\varepsilon_j a_{i_0,j} = |a_{i_0,j}|$. Alors

$$\begin{aligned}
 \|(AX)_{i_0}\| &= \left| \sum_{j=1}^n a_{i_0,j} \varepsilon_j \right| \\
 &= \left| \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}| \right| \\
 &= \sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}| \\
 &= \|L_{i_0}\|_1 = \max_{i=1, \dots, n} \|L_i\|_1.
 \end{aligned}$$

Ainsi, $\|AX\|_\infty \geq \max_{i=1, \dots, n} \|L_i\|_1 = \max_{i=1, \dots, n} \|L_i\|_1 \cdot \|X\|_\infty$. Ceci prouve que $\|A\| \geq \max_{i=1, \dots, n} \|L_i\|_1$ et donc on a bien prouvé que

$$\|A\| = \max_{i=1, \dots, n} \|L_i\|_1.$$

Correction de l'exercice 59 ▲

1. ϕ est clairement une application linéaire, et il faut juste rappeler que $\phi(f)$, comme primitive d'une fonction continue, est elle-même continue (et même C^1).

2. On a

$$|\phi(f)(x)| \leq \int_0^x |f(t)| dt \leq \int_0^1 |f(t)| dt \leq \|f\|_1.$$

On en déduit que

$$\|\phi(f)\|_1 \leq \int_0^1 \|f\|_1 dt \leq \|f\|_1.$$

Ainsi, ϕ est continue.

3. On a $\phi(f_n)(x) = \int_0^x n e^{-nt} dt = 1 - e^{-nx}$. En particulier, $\|f_n\|_1 = \phi(f_n)(1) = 1 - e^{-n}$. De plus,

$$\|\phi(f_n)\|_1 = \int_0^1 (1 - e^{-nx}) dx = 1 - \frac{1 - e^{-n}}{n}.$$

4. D'après la question 2, pour tout $f \in E$,

$$\|\phi(f)\|_1 \leq \|f\|_1,$$

et donc $\|\phi\|_{\text{op}} \leq 1$. De plus, on a

$$\|\phi(f_n)\|_1 \leq \|\phi\|_{\text{op}} \|f_n\|_1 \implies \left(1 - \frac{1 - e^{-n}}{n}\right) \leq (1 - e^{-n}) \|\phi\|_{\text{op}}.$$

Passant à la limite dans cette inégalité, on conclut que $\|\phi\|_{\text{op}} \geq 1$, ce qui prouve finalement que $\|\phi\|_{\text{op}} = 1$.

5. On commence par remarquer que ϕ n'est pas surjective. En effet, $\phi(f)$ est de classe \mathcal{C}^1 pour tout $f \in E$, et il existe des fonctions de E qui ne sont pas \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$, par exemple la fonction $x \mapsto |x - \frac{1}{2}|$. En revanche, ϕ est injective. En effet, si $\phi(f) = 0$, alors pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\int_0^x f(t) dt = 0.$$

En dérivant cette égalité, on trouve $f(x) = 0$ pour tout $x \in [0, 1]$ et donc $f = 0$.

6. Soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. On va démontrer que λ n'est pas une valeur propre de ϕ . Si $f \in E$ vérifie $\phi(f) = \lambda f$, alors pour tout $x \in [0, 1]$,

$$\int_0^x f(t) dt = \lambda f(x).$$

Ceci prouve que f est dérivable et en dérivant la relation précédente, on trouve que, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$f(x) = \lambda f'(x).$$

Ainsi, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = Ce^{x/\lambda}$ pour tout $x \in [0, 1]$. Mais on doit avoir $f(0) = \phi(f)(0) = 0$, et donc $C = 0$. Ainsi, $f = 0$ et λ n'est pas valeur propre de ϕ . On vient donc de prouver que ϕ n'admet pas de valeurs propres (ce qui est possible car E est de dimension infinie).

Correction de l'exercice 60 ▲

L'exercice est corrigé en partie dans la vidéo suivante :

Supposons d'abord que $|c| < 1$. Alors, pour $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$,

$$|\phi_c(P)| = \left| \sum_{k=0}^n a_k c^k \right| \leq \sum_{k=0}^n |a_k| |c|^k \leq \|P\|_{\infty} \frac{1 - |c|^{n+1}}{1 - |c|}.$$

Puisque $|c| < 1$, on en déduit que

$$|\phi_c(P)| \leq \|P\| \frac{1}{1 - |c|}$$

donc ϕ_c est continue et $\|\phi_c\| \leq \frac{1}{1 - |c|}$. On va prouver que cette dernière inégalité est en fait une égalité. D'abord, si $c \geq 0$, on considère le polynôme $P_n(X) = 1 + X + \dots + X^n$. Alors

$$\phi_c(P_n) = 1 + c + \dots + c^n = \frac{1 - c^{n+1}}{1 - c}.$$

Mais $\|P_n\| = 1$, et donc on obtient

$$\frac{1 - c^{n+1}}{1 - c} = \|\phi_c(P_n)\| \leq \|\phi_c\| \|P_n\| = \|\phi_c\|.$$

Faisant tendre n vers $+\infty$, on conclut que $\|\phi_c\| \geq \frac{1}{1 - c}$, ce qui donne l'autre inégalité. Si maintenant $c < 0$, on effectue le même travail avec le polynôme $Q(X) = 1 - X + X^2 - \dots + (-1)^n X^n$. Pour $c \geq 1$, on a $\phi_c(P_n) = 1 + c + \dots + c^n \geq n + 1$ alors que $\|P_n\| = 1$. L'application ϕ_c ne peut pas être continue. On a le même résultat si $c \leq -1$, en considérant cette fois Q_n .

Correction de l'exercice 61 ▲

1. Remarquons que $|f| \geq f$, et donc $|f| - f \geq 0$. On en déduit que $u(|f|) \geq u(f)$. De même, on a $|f| \geq -f$, soit $|f| + f \geq 0$ et donc $u(|f|) \geq u(-f) = -u(f)$. Finalement, on obtient bien que $|u(f)| \leq u(|f|)$.

2. On sait que $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$, ce qui s'écrit encore $\|f\|_\infty e - |f| \geq 0$. Ainsi, on a

$$|u(f)| \leq u(|f|) \leq u(\|f\|_\infty e) \leq u(e)\|f\|_\infty.$$

Ceci prouve que u est continue, avec $\|u\| \leq u(e)$. De plus, pour $f = e$, on a exactement $u(f) = u(e)\|e\|_\infty$, ce qui prouve qu'en réalité $\|u\| = u(e)$.
